UNIVERSIDADE DE LISBOA

RELATÓRIO DA PRÁTICA DE ENSINO SUPERVISIONADA

APRENDIZAGEM DAS EQUAÇÕES DO 1º GRAU: UM ESTUDO COM ALUNOS DO 7º ANO DE ESCOLARIDADE

Catarina Isabel Pires de Carvalho

MESTRADO EM ENSINO DA MATEMÁTICA

2012

UNIVERSIDADE DE LISBOA

RELATÓRIO DA PRÁTICA DE ENSINO SUPERVISIONADA

APRENDIZAGEM DAS EQUAÇÕES DO 1º GRAU: UM ESTUDO COM ALUNOS DO 7º ANO DE ESCOLARIDADE

Catarina Isabel Pires de Carvalho

Orientadora: Professora Doutora Leonor Santos

Coorientadora: Professora Doutora Maria João Ferreira

MESTRADO EM ENSINO DA MATEMÁTICA

2012

RESUMO

Este trabalho pretende identificar, analisar e categorizar os métodos e os erros cometidos na resolução de equações de 1º grau por alunos de uma turma do 7º ano de escolaridade numa escola EB 2,3, em Lisboa.

Para este estudo foram escolhidos quatro alunos com diferentes níveis de desempenho, recorrendo ao aproveitamento escolar em Matemática nos 1.º e 2º. períodos letivos. A recolha de dados baseou-se numa entrevista semi-estruturada, gravada em áudio e transcrita na íntegra; e na recolha documental (produções escritas dos alunos, cadernos diários e testes de avaliação, e documentos vários da escola); e na observação e gravação vídeo de aulas.

Os resultados obtidos evidenciam que os métodos mais frequentemente usados pelos alunos do 7.º ano de escolaridade na resolução de equações de 1.º grau foram: o método de substituição por tentativa e erro, e o método formal que inclui transpor ou efetuar a mesma operação em ambos os lados da equação.

Os erros mais frequentemente cometidos foram: erros por eliminação, erros por redistribuição, os erros de divisão,e a ausência de estrutura. Foi também identificado um erro com origem em atitudes afetivas e emocionais face à Matemática.

Verificou-se que os alunos na resolução de equações de 1º. grau, numa primeira fase recorreram à representação pictórica e, posteriormente passaram a usar esta representação conjuntamente com a representação algébrica

ABSTRACT

This work aimed to identify, analyse and categorise the methods, as well as the mistakes committed by students belonging to a 7th-form class, attending an intermediate school in Lisbon, while solving simple equations.

To the present survey, four students, with different levels of achievement, have been selected, having the school marks at Mathematic attained by the end of the first and second terms provided a valuable asset.

Data gathering was supplied by a semi-structured, audiorecorded interview and fully transcribed; and the documental collecting (the pupils' written productions, namely in their exercise-books and assessment tests; the observation, the video recording of classes themselves.

The results show that the methods seventh-formers more frequently applied in finding a solution for simple equations, were the replacement strategy by trial and error or the formal method which includes to reversing or accomplishing the same operation on both sides of equation.

The mistakes that were most frequently commited by the students were: elimination errors, redistribution mistakes, division error and structure absence. One error was also identified, matching stem from affectionate and emotional attitudes facing mathematics.

It was verified that the pupils, when finding a solution for simple equations, in a first phase had appealed to pictorial representation and, later began to use this representation together with the algebraic representation.

AGRADECIMENTOS

À Doutora Leonor Santos e à Doutora Maria João Ferreira pela disponibilidade e atenção que me dedicaram e por todo o apoio que foi uma constante ao longo deste trabalho.

Aos alunos que se disponibilizaram para contribuir para este trabalho, sem os quais não seria possível este estudo.

À minha colega e Amiga Sona, que esteve sempre ao meu lado neste percurso, que me apoiou e que se mostrou sempre disponível para me ajudar.

À minha família por todo o apoio que me deram durante todo esta etapa da minha vida.

À minha prima e Amiga Filipa que sempre me apoiou e incentivou na realização deste trabalho.

A todos os meus amigos que me apoiaram e entenderam o meu afastamento.

Índice

Índice de figuras

Índice de quadros

Índice de anexos

1.Introdução

Como tema para este trabalho optei pela álgebra, escolhendo o tópico Equações e subtópico Equações de 1.º grau, a lecionar à turma 2 do 7.º ano, da Escola EB 2,3 Fernando Pessoa, no terceiro período.

A escolha das equações de 1.º grau como conteúdo deste trabalho parece-me apropriada pela importância que estas têm na resolução de problemas tanto na Matemática como em áreas fora da Matemática.

Porque este tema já foi estudado no 2.º ciclo em que os "alunos trabalham com situações envolvendo proporcionalidade direta, identificam relações e utilizam linguagem simbólica para as representar, e estudam padrões geométricos e regularidades em sequências numéricas finitas ou infinitas (sucessões)." (DGIDC, 2007, p.55), considero de grande pertinência a abordagem a este tema, agora para o 3º ciclo. Nos 1º e 2º ciclos não se pretende que o aluno já resolva equações, mas sim que desenvolva o conceito de igualdade e a compreensão das propriedades das operações e da relação de cada operação e a sua inversa. (Ponte, 2009). No 3º ciclo já se pretende que os alunos resolvam equações e as apliquem na resolução de problemas sendo, no entanto, necessário considerar as dificuldades que daí advêm.

Uma vez que as dificuldades dos alunos na resolução de equações de 1.º grau são de décadas passadas e quem sabe de décadas futuras, acho relevante o estudo destas dificuldades, tanto pela questão prática do dia-a-dia, na sala de aula, como na construção, aquisição, compreensão e utilização de conceitos algébricos por parte dos alunos.

Pretende-se que com o ensino deste tema, o aluno adquira a capacidade de interpretar, representar e resolver problemas usando procedimentos algébricos, utilizando estes conhecimentos e competências na análise de situações das diferentes áreas (DGIDC, 2007).

Deste modo com este estudo procura-se compreender como os alunos do 7.º ano de escolaridade aprendem, aplicam e justificam os métodos de resolução de uma equação de 1.º grau.

Em relação aos procedimentos dos métodos adotados pelos alunos para resolver equações do 1º grau pretende–se com este estudo analisar os aspetos conceituais e os relacionados com o método de resolução (Freitas, 2002).

Os aspetos conceituais podem ser compreendidos como o domínio do simbolismo algébrico em que se expressa uma equação e, particularmente, "ter um entendimento de igualdade como símbolo de equivalência entre os membros; dar significado à variável e ao valor encontrado da incógnita na equação" (Freitas, 2002, p.2). Neste trabalho pretende-se também analisar como os alunos, face a diferentes equações, aplicam as técnicas de resolução de equações de 1º grau.

Este trabalho procura, além de identificar, analisar e categorizar os procedimentos, também identificar os erros que os alunos do 7º ano cometem na resolução de equações de 1º grau. É de salientar que o erro é conceptualizado como um fenómeno inerente à aprendizagem (Santos, 2002). Assim sendo, a compreensão dos erros cometidos pelos alunos e as suas justificações podem facultar pistas para novas abordagens de ensino.

Deste modo, tendo em conta o objetivo deste trabalho, foram formuladas as seguintes questões:

a) Quais os métodos que os alunos do 7º ano usam para resolver equações de 1º grau e como os justificam?
b) Em particular, quais os principais erros cometidos por alunos do 7º ano ao resolver equações de 1º grau e que razões lhes são subjacentes?

O presente relatório está dividido em seis capítulos, descritos da seguinte forma:

O **capítulo 1** é a Introdução, onde se apresentam a pertinência, o objetivo e as questões deste trabalho. No **capítulo 2** discuto o enquadramento curricular e didático, onde abordo as conceções da álgebra, as orientações curriculares, os métodos de resolução de equações e tipologias de erro. No **capítulo 3** apresento a unidade de ensino. É descrita a caracterização da turma, a ancoragem da unidade, a explicitação dos assuntos matemáticos envolvidos, a explicitação das estratégias de ensino e sua justificação, a apresentação dos materiais e tarefas e uma descrição sumária das aulas realizadas. No **capítulo 4** apresento os métodos e procedimentos utilizados para a recolha de dados, indicando os instrumentos usados e sua justificação. O **capítulo 5** é dedicado à apresentação e análise de dados de forma a responder às questões do estudo. Finalmente, no capítulo 6 são apresentados os principais resultados obtidos é feita uma reflexão sobre o trabalho realizado.

2. Enquadramento da Problemática

O ensino e a aprendizagem da álgebra têm vindo nas últimas décadas a ser objeto de atenção na investigação em educação matemática, quer a nível nacional, quer internacional. Neste relatório é apresentado um breve estudo que procura investigar, identificar e analisar quais os métodos utilizados na resolução de equações de 1.º grau e quais os principais erros cometidos na resolução destas equações por alunos do 7.º ano de escolaridade.

2.1. A Álgebra no ensino

As origens da álgebra encontram-se na antiga Babilónia, cujos matemáticos desenvolveram um sistema aritmético avançado, com o qual puderam fazer cálculos algébricos. Com esse sistema eles foram capazes de aplicar fórmulas e calcular soluções para incógnitas numa classe de problemas que, hoje, seriam resolvidos como equações lineares, equações quadráticas e equações indeterminadas. De acordo com Baumgart (1992, in Gil, 2008), a palavra álgebra é uma variante latina da palavra árabe *al-jabr*, usada no título de um livro *Hisab al-jabr w'al-muqabalah,* escrito em Bagdá por volta do ano 825 pelo matemático árabe Mohammed ibn-Musa al- Khowarizmi. Abū ‘Abd Allāh Muḥammad ibn Mūsā al-Khwārizmī nasceu na Pérsia por volta de 800 d.C. em Khwarizmi (atualmente no Uzbequistão), e viveu em Bagdá na corte do califa Al Manum. É considerado o fundador da álgebra tal como a conhecemos.

O seu trabalho, intitulado Al-Jabr wa-al-Muqabilah, é um trabalho extremamente didático que teve por objetivo de ensinar soluções para os problemas matemáticos cotidianos de então. Uma tradução literal do título do livro é “ciência da restauração (ou reunião) e redução”, mas matematicamente seria melhor “ciência da transposição e cancelamento”, ou ainda talvez a melhor tradução fosse “a ciência das equações” (Gil, 2008).

Miorim, Miguel e Fiorentini (1993, in Gil, 2008) afirmam que, durante a história do ensino da Matemática, se podem encontrar diversas conceções para educação algébrica. A primeira, a que designam por linguístico-pragmática, foi predominante durante todo o século XIX e primeira metade do século XX.

Prevalecia, então, a crença de que a aquisição, ainda que mecânica, das técnicas requeridas pelo transformismo algébrico – obtenção de expressões equivalentes mediante o emprego de regras e propriedades válidas – seria suficiente para que o aluno fosse capaz de resolver problemas, ainda que estes fossem quase sempre artificiais.

Uma nova conceção surgiu com o Movimento da Matemática Moderna, denominada fundamentalista - estrutural. Nesta conceção, o papel pedagógico da educação algébrica é o de fundamentar os vários campos da matemática escolar. Partia-se do princípio que a inclusão das propriedades estruturais das operações aplicadas ao transformismo algébrico, capacitaria o aluno a estabelecer associações entre essas estruturas e os diferentes contextos (Gil, 2008).

Por fim, uma terceira conceção foi chamada pelos autores de fundamentalista-analógica. Esta conceção faz uma síntese das anteriores. Procura recuperar o valor instrumental da álgebra, mantendo o caráter fundamentalista de justificação na maior parte das vezes, em recursos analógicos geométricos (Miorim, Miguel & Fiorentini, 1993, in Gil, 2008).

Também Ponte (2005), fazendo uma comparação entre o passado e o presente, afirma que há 200 anos poderíamos dizer que os objetos fundamentais da álgebra seriam certamente as equações, mas hoje esta resposta já não satisfaz. A melhor forma de indicar os grandes objetivos da álgebra, ao nível escolar, é dizer então que visa o desenvolvimento do pensamento algébrico.

É importante lembrar que não existe um consenso no que se refere à conceção de álgebra entre os estudiosos no assunto (Gil, 2008). Usiskin (1995, in Araújo, 2010) no seu trabalho, identifica quatro tipos de entendimentos sobre a álgebra: como aritmética generalizada; como um estudo de procedimentos para resolver certos tipos de problemas; como estudo de relações entre grandezas e como estudo das estruturas. Uma vez que as variáveis de uma equação de 1.º grau são incógnitas, este estudo está inserido na conceção da álgebra como um estudo de procedimentos para resolver certos tipos de problemas. Esta conceção da álgebra, segundo Kieran (1994, in Araújo, 2010), gera duas abordagens: uma aritmética focada nas operações, e uma algébrica focada nas operações inversas. O procedimento da primeira abordagem será a resolução por tentativa e erro e, no segundo caso, resolução por transposição de termos.

Segundo Mason (1996), encarar a álgebra como um estudo de procedimentos para resolver certos tipos de problemas resulta do uso da incógnita para expressar cálculos e relações em problemas, obtendo-se valores desconhecidos, através de manipulação de símbolos, manipulação de expressões simbólicas e da expressão de fórmulas.

Para Kaput, pensar a álgebra como um processo para resolver uma equação, implica realizar manipulação guiada pela sintaxe e também pela semântica. "As regras sintáticas são usadas para manipular ou modificar a sua forma"(Pag???). Para além disso, "é possível atuar semanticamente sobre o formalismo", o que significa que podemos resolver uma equação "tendo uma base semântica pensada sobre um sistema concetual numérico, representado pela equação formal" (Freitas, 2002, p.14).

Além destas conceções sobre a álgebra (Usinkin, 1995, in Araújo, 2010), existem estudos sobre os seus elementos, como o sinal de igual (Kieran, 1981; Molina, 2004; Cavalcanti, 2008), ou sobre a própria equação (Linchevski; Sfard, 1991; Lima, 2007). Os estudos sobre os significados do conceito de igualdade envolvem necessariamente a equivalência entre as expressões algébricas ou aritméticas que compõem uma equação. No entanto, o significado que persiste é o operacional do sinal de igual. Este símbolo é sinónimo de *efectue*. Mesmo havendo o significado relacional do sinal de igual, é importante ressaltar que:

> [...] a capacidade de considerar uma equação algébrica como uma expressão de equivalência, porque ambos os lados têm o mesmo valor, não parece ser suficiente para uma conceitualização adequada do processo de resolução de equação (Kieran, 1981, p. 323, in Araújo, 2010).

Além disso, a equivalência no contexto das equações não se restringe ao caso da igualdade entre expressões, como destaca Kieran (1981, p. 323, in Araújo, 2010):

> resolver equações não apenas envolve uma compreensão da noção de que os lados direito e esquerdo da equação são expressões equivalentes, mas também que cada equação pode ser substituída por uma equação equivalente (ou seja, que tem o mesmo conjunto solução).

"Entretanto, compreender que duas equações são equivalentes porque é possível transformar uma na outra não garante a compreensão de que elas tenham o mesmo conjunto solução" (Araujo, 2010, p.13).

Os estudos de Linchevski e Sfard (1991, in Araújo, 2010) sobre as conceções de equivalência dos alunos, indicam que "[...] a transformabilidade formal era praticamente o único critério para a equivalência" (p. 232), no lugar da igualdade do seu conjunto solução. Em contraste, a pesquisa de Lima (2007) sobre as conceções dos alunos sobre equação aponta a conceção *Conta* como a mais evidente:

> Nesta conceção, a equação é uma conta que tem como objetivo a realização das operações existentes nas duas expressões algébricas que a compõem. Apesar disto, não é dada importância à relação de equivalência existente na igualdade, o que pode levar a erros na resolução de uma equação. (Araújo, 2010, p. 15)

Os resultados distintos das pesquisas de Linchevski e Sfard (1991, in Araújo, 2010) e de Lima (2007) levam à seguinte questão: Como abordar a noção de equivalência presente numa equação, uma vez que "[...] não é claro, se, ou mesmo como, esses princípios na direção de interpretar o sinal de igual em termos de uma relação de equivalência se desenvolvem numa consciência da noção de equações equivalentes [...]" (Kieran, 1981, p. 325, in Araújo, 2010).

Um modelo usado desde há muito para o ensino dos princípios de equivalência e das regras práticas de resolução de equações é o da balança de dois pratos (Filloy & Rojano, 1989; Vlassis, 2002, in Lima, 2007), pois "[...] a balança oportuniza a compreensão do princípio de equivalência" (Lins Lessa & Falcão, 2005, p. 320, in Lima, 2007). O uso deste modelo facilita a compreensão da operação de eliminar o mesmo termo de ambos membros e também a operação de multiplicar ambos os membros por um número diferente de zero (Ponte, Branco & Matos, 2009). Outro modelo usado é o modelo geométrico (Filloy & Rojano, 1989, in Lima, 2007). Estes modelos são úteis para, numa primeira abordagem, dar significado à resolução de equações mais simples. Porém, nas equações de maior complexidade, surgem ainda dificuldades:

> Mesmo que estes modelos não suportem situações que envolvam números negativos, eles pretendem dar significado ao sinal de igual e às técnicas de resolução de equações. Entretanto, eles são bem sucedidos apenas num primeiro momento, com equações simples. Os alunos ainda apresentam dificuldades na resolução de equações mais sofisticadas. (Lima, 2007)

Kieran *et al*. (2008, in Araújo, 2007) apresentam uma outra abordagem à noção de equivalência presente numa equação, que passa pela problematização da matemática com recurso às tecnologias. Para esses autores:

> Problematizar a matemática significa torná-la aberta à discussão, isto é, criar uma arena matemática na qual questões são postas e tenta-se pensar profundamente sobre a matemática, incluindo aquilo que pode parecer ser inconsistências ou contradições e, de fato, usando

> dilemas provocados pela tecnologia como um meio de fazer avançar o pensamento. (ibid, p. 250)

Neste contexto, as tecnologias favorecem as discussões nas aulas sobre Álgebra simbólica-literal.

2.2. Orientações curriculares para a aprendizagem das equações

Não é fácil dar uma definição de "equação" de um modo exato e adequado a alunos do ensino básico. O primeiro passo a dar será no 1.º ciclo, onde os alunos já manuseiam expressões como por exemplo 10 = __ + 2. Estas expressões surgem facilmente durante o trabalho com números e operações. Assim, equação será uma igualdade, como a indicada, "onde há um valor desconhecido" (Ponte, Branco & Matos, 2009).

No 2.º ciclo já se prevê que os alunos utilizem a linguagem simbólica, mas não se pretende que resolvam equações complexas. Espera-se que os alunos sejam capazes de resolver equações mais simples, dando significado às operações, tais como a operação inversa. Caso o aluno não consiga resolver as equações deste modo, poderá sempre recorrer ao processo de contagem ou ao de tentativa erro.

Já no 3.º ciclo, pretende-se que os alunos aprendam a resolver equações interpretando e representando situações em diferentes contextos e, além disso, sejam capazes de resolver problemas recorrendo a conceitos e procedimentos algébricos. (Ponte, Branco & Matos, 2009). Assim, no 3.º ciclo, os alunos já devem entender que uma equação é "uma igualdade entre duas expressões, em que alguns valores são desconhecidos". Neste ciclo, os alunos já deverão saber resolver equações do tipo $x + 10 = 15$ e ao resolver uma equação deverão ser capazes de verificar se determinado valor é ou não solução. Além disso, devem saber que duas equações são equivalentes se e só se tiverem a mesma solução (Ponte, Branco & Matos, 2009). De frisar que a definição anterior não é rigorosa. É de notar que existem expressões com o sinal de "=" que não são equações, como por exemplo $2 + 12 = 14$ (não é uma equação porque nela não há qualquer valor desconhecido).

Um conceito mais restritivo de equação surge quando se diz que "uma equação é uma igualdade entre duas expressões, em que alguns valores são desconhecidos e que só é satisfeita para certos valores da incógnita". Por seu lado este conceito exclui as identidades como x=x e as equações impossíveis, tais como 1+x=x. É então preferível usar a noção abrangente de equação, isto é uma equação é "uma igualdade entre duas expressões, em que alguns valores são desconhecidos" uma vez que, ao olharmos para uma expressão com o sinal de igual, poder-se-á tratar de uma identidade, equação possível ou impossível (Ponte, Branco & Matos, 2009).

O valor desconhecido, que irá ser descoberto por meio de uma equação chama-se incógnita. Em matemática, uma incógnita é uma variável cujo valor deve ser determinado de forma a resolver essa equação. As variáveis e as incógnitas representam-se por x (tratando-se de uma variável real) e n (quando se trata de uma variável natural), mas podiam-se usar letras diferentes, não devendo o uso ser restrito a estas letras uma vez que podem existir outras letras no lugar de variável.

O trabalho com equações pressupõe a familiarização dos alunos com uma nova terminologia, como "termo", "membro", e uma nova significação das expressões algébricas, como "monómio", "polinómio", "binómio", "coeficiente numérico", "parte literal", etc (Ponte, Branco & Matos, 2009).

Na resolução de equações, os alunos deverão basear-se nos princípios de equivalência. Posteriormente os princípios passarão a ser "regras práticas". O princípio de que se pode somar e subtrair a mesma quantidade a ambos os membros, passou a ser a regra da transposição que permite mudar um termo de membro trocando-lhe o sinal. O princípio de que se pode multiplicar e dividir (por um número diferente de zero) passou também a ser regra. O princípio que nos permite substituir uma expressão equivalente deixou, em muitos casos, de ser enunciado. Esta abordagem facilita o processo de resolução de equações, no entanto é necessário que os alunos compreendam de onde vêm as regras práticas e justificá-las (Ponte, Branco & Matos, 2009).

2.3 Métodos de resolução de equações

Em geral, os alunos resolvem as equações de 1.º grau, da forma ax+b = cx+d, utilizando o método da transposição, isto é, transpondo os termos de um membro para o outro da igualdade. Por vezes, este método é adotado, mecanicamente, sem a compreensão do que são equações equivalentes, levando o aluno a cometer erros (Freitas, 2002).

Outros possíveis métodos de resolução de equações de 1º grau, a seguir pelos alunos são:

1) o encobrimento (que consiste em "esconder" determinado termo, a fim de encontrar uma resposta que seja satisfatória em relação à igualdade. Por exemplo, na equação 2x+3=8x, se escondermos o número 3 e perguntarmos: 2x somado com quanto resulta em 8x? A resposta seria 6x, assim 3=6x, consequentemente x = ½).

2) método de desfazer ou efetuar a operação inversa (este método baseia-se nas noções de inversos operacionais e na reversibilidade de um processo envolvendo um ou mais passos invertíveis);

3) método de substituição por tentativa e erro, pode ser usado nas equações aritméticas da forma ax=b (por exemplo, na equação 4x=12, o procedimento para encontrar o valor da incógnita x resume-se a determinar o número que multiplicado por 4 ser igual a 12);

4) métodos formais que incluem transpor ou efetuar a mesma operação em ambos os lados da equação (Freitas, 2002).

O método do encobrimento é limitado para equações do tipo ax+b=cx+d, e apoia-se na equivalência de termos, aplicando o método formal de efetuar a mesma operação em ambos os lados. No método de desfazer, para resolver, por exemplo, equações do tipo ax+b=c, toma-se o resultado numérico do lado direito e, procedendo da direita para a esquerda, desfaz-se cada operação pela sua inversa. Este método, com as suas limitações, estimula a reversibilidade, a análise e resolução de problemas, fornecendo pré-requisitos que podem ser usados na aprendizagem do método das equações equivalentes. O método de tentativa e erro é um método de resolução elementar. Os alunos que optam por este método possuem uma noção mais desenvolvida do equilíbrio entre os membros de uma equação e do sentido de equivalência do sinal de igual (Freitas, 2002). Há alunos que consideram a transposição de termos como o procedimento de efetuar a mesma operação em ambos os membros. Nesta última é realçada a relação de equivalência das equações, que não está evidente no procedimento de transposição.

2.4 O Erro na resolução de equações

Segundo Freitas (2002), muitos alunos ignoram a existência de outros métodos de resolução, além da transposição de termos. Ao falar de outros métodos, incluo, os já referidos, o método do encobrimento, o método de desfazer, o método por substituição por tentativa e erro e o método formal de realizar a mesma operação em ambos os termos da equação (ou das equações equivalentes). O método da transposição pode ser aplicado com eficiência se for aplicado com sentido, realizando a operação inversa ou efetuando a mesma operação em ambos os membros da equação.

Mas este processo usado sem a compreensão de equações equivalentes leva os alunos a cometerem erros. De facto, muitas das dificuldades que os alunos apresentam têm a ver com o significado que dão às expressões algébricas e às condições de equivalência. Há erros que ocorrem ao efetuar a transposição sem alterar o sinal, ou alterar indevidamente o sinal do coeficiente, muitas vezes procedendo de forma mecânica, sem a perceção da operação envolvida. Muitos alunos aprendem a manipular equações de maneira mecânica usando o procedimento "Muda de lado – muda de sinal" (Kieran, 1992, in Freitas, 2002, p. 5).

Sabe-se que o "erro se constitui como um conhecimento, ou seja, os erros são legítimas fontes de estudos, informando as conceções e crenças que os alunos foram adquirindo ao longo de toda sua vida escolar" (Lima, 2010). No entanto, o erro no processo e ensino-aprendizagem no campo da Matemática ainda é considerado, por muitos professores, como uma limitação dos alunos, demonstrando a sua incapacidade de aprender. No entanto, na perspetiva de Engler (2004, in Lima, 2010), os erros são manifestações exteriores de um processo complexo em que interagem muitas variáveis, entre elas, por exemplo: professor, aluno, currículo e contexto sociocultural.

Segundo Santos *et al*. (2010), o erro é um fenómeno inerente à aprendizagem que pode dar informações importantes ao professor sobre como o aluno está a pensar. Radatz (1980) afirma que:

> A análise de erros também serve como ponto de partida para a pesquisa sobre o processo de ensino-aprendizagem matemático e como estratégia de pesquisa promissora para esclarecer algumas questões fundamentais da aprendizagem matemática. (Radatz, 1980).

Cury (1995, in Lima, 2010) considera e analisa os erros sob dois aspetos: eliminando-os ou explorando as suas potencialidades. Se o foco de interesse for o conteúdo técnico administrativo do erro e o que se deseja é eliminá-lo, deve-se procurar diagnosticar as suas causas, pois neste caso representa uma falha no processo. Se se pretende explorar o erro, focando o seu conteúdo técnico-matemático, este passa a ser visto como um estágio necessário no processo de aprendizagem, levando a novas descobertas matemáticas. Neste processo, os erros podem ser vistos como um meio de identificação dos problemas do currículo e da metodologia que não está a ser eficaz. Ao resolver estes erros é possível eliminá-los. No caso da exploração, o erro é encarado como meio para a compreensão dos processos cognitivos dos alunos (Lima, 2010).

Para estudar tais processos cognitivos, Rivière (1995, p. 67) salienta que:

> Muitos erros são resultados de procedimentos ou algoritmos incorretos que as crianças inventam. A questão é de como chegam a essa invenção e qual o seu significado e coerência em função das estruturas de conhecimento e dos recursos cognitivos que as crianças possuem.

Os erros são uma preocupação constante do professor. Engler (2004, p. 23, in Lima, 2010) afirma que "os erros influenciam a aprendizagem de diferentes conteúdos, e é imprescindível que se reconheçam e apoiem a necessidade de superá-los, a fim de obter sucesso na aprendizagem". Este autor refere ainda que a análise de erros serve para ajudar o professor a organizar estratégias de ensino, pois esta análise fornece informações e dados essenciais para a qualidade do ensino-aprendizagem da Matemática.

Na visão de Engler (2004, p. 23, in Lima, 2010),

> O papel que nós, como professores, damos para o erro e a forma na qual trabalhamos, influenciam na aprendizagem e no desempenho académico dos nossos alunos. Se quisermos uma aprendizagem significativa, a prioridade é a compreensão e tratamento do tema em conjunto, professores e alunos.

A autora conclui que "é por meio dos erros que os alunos podem tomar consciência de suas dificuldades e construir seu conhecimento, mas é necessário que se pesquise, questione e problematize essas dificuldades" (in Lima, 2010).

Por sua vez, para Rico (1995, in Lima, 2010), os erros fazem parte das produções dos alunos durante a aprendizagem matemática e fornecem dados objetivos que estão permanentemente ao longo de todo o processo educativo.

Também Borasi (1985, in Lima, 2010) considera o erro como um instrumento didático, enfatizando a exploração e a descoberta como objetivos dos seus estudos, que, como vários autores, consideram o erro como construtor do conhecimento. A autora acreditava que o foco da aprendizagem estaria no processo, e não no produto final. A análise qualitativa aprofundada das respostas dos alunos e das dificuldades por eles evidenciadas passa a ser a melhor forma de aproveitar os erros na construção do seu conhecimento (Santos, 2002; Vale, 2010).

Deste modo, partindo dos erros detetados, levar os alunos a questionar as suas respostas para fazer autorregulação da sua própria aprendizagem pode constituir "um trampolim para a aprendizagem" (Borasi, 1985, in Vale, 2010, p. 3). Ainda segundo (Borasi, 1996, in Vale, 2010), o professor pode remediar *falhas* encontradas nas respostas dos alunos, pode ajudá-los a descobrir novos conceitos a partir do aprofundamento da análise de erros cometidos ou pode pesquisar processos cognitivos dos alunos a partir das suas respostas a questões orais ou produções escritas. Assim, além de ser uma metodologia de investigação, a análise das respostas passa a ser entendida como uma metodologia de ensino.

Borasi (1985, in Vale, 2010) afirma ainda que "uma aprendizagem mais profunda pode ser alcançada pelos alunos quanto aos conteúdos matemáticos, caso os estudos se deem a partir dos próprios erros ou daqueles que foram cometidos por outros" (Borasi, 1985, in Lima, 2010). Assim, as discussões em sala de aula sobre erros podem gerar aprendizagens muito ricas e significativas, passando estas a ser uma metodologia de ensino, levantando questões, para construir o seu próprio conhecimento (Lima, 2010).

Já desde a antiguidade o erro era considerado um fracasso, sujeito a castigo a quem o cometesse. Mas, para que os alunos acertem mais, é preciso, segundo Rocha (2001, in Lima, 2010), que tenham oportunidade de errar, sem serem punidos. Não se considerando o erro, o professor deixa muitas vezes um potencial didático de grande valor que poderia ser trabalhado por meio de questionamentos, inquietações, criatividade, experimentações, e trazer novas conceções no processo de ensino e aprendizagem da Matemática, reduzindo as aulas de Matemática a um mero treino baseado na memorização e repetição.

De acordo com Engler (2004, in Lima, 2010), para que seja possível concentrar a atenção sobre diferentes aspetos, avaliando mais eficazmente, ajudando os alunos nas suas dificuldades, é necessário categorizar os erros. Porém, nas palavras de Lüdke e André (1986, p. 42, in Lima, 2010):

> A construção de categorias não é tarefa fácil. Elas brotam, num primeiro momento, do arcabouço teórico em que se apoia a pesquisa. Esse conjunto inicial de categorias, no entanto, vai ser modificado ao longo do estudo, num processo dinâmico de confronto constante entre teoria e prática, o que origina novas conceções e, consequentemente, novos focos de interesse.

Na pesquisa para este trabalho, foi possível constatar que existem diferentes tipologias para classificar o erro na matemática. Franchi e Hernández (2004) selecionaram modelos de tipificações de erros, explicitando as respetivas categorias, apresentadas por cinco autores. O Quadro 1 resume a análise feita por estes autores.

Quadro 1: Tipologias de erros (Franchi & Hernández, 2004, pp. 66-67)

Tipologia	**Categorias**
Radatz (1979)	Erros devidos a dificuldades de linguagem. Erros devidos a dificuldades para obter informação espacial. *Erros devidos a uma aprendizagem deficiente de factos, destrezas e conceitos prévios:* esta categoria abarca todas as deficiências sobre conteúdos e procedimentos específicos para a realização de uma tarefa matemática. *Erros devido a rigidez de pensamento*: relacionados com os obstáculos. *Erros devidos à aplicação de regras ou estratégias irrelevantes*: referem-se aos que surgem quando se aplica com êxito uma estratégia em áreas de conteúdos diferentes.
Movshovitz et al. (1987)	Erros devidos a dados mal utilizados. Erros devidos a uma interpretação incorreta da linguagem. Erros devidos a inferências lógicas não válidas. Erros devidos ao uso de teoremas ou definições errόneos. Erros devidos à falta de verificação da solução. Erros técnicos: erros de cálculo, de procedimento em algoritmos básicos.
Socas (1997)	Erros que têm a sua origem num obstáculo. Erros que têm a sua origem na ausência de significado; Nesta categoria encontram-se: erros da álgebra que têm a sua origem na aritmética erros de procedimento que derivam do uso inapropriado que fazem os alunos das fórmulas ou de regras de procedimento erros de álgebra devidos às características próprias da linguagem algébrica.

	Erros que têm a sua origem em atitudes afetivas e emocionais face à matemática.
Astolfi (1999)	Erros devidos à compreensão das instruções de trabalho dadas: relacionados com a dificuldade que têm os alunos para compreender as instruções de trabalho que lhes são dadas, seja na forma oral ou escrita. Erros que provêm dos hábitos escolares ou de uma má interpretação das expectativas. Erros como resultado das conceções alternativas dos alunos: estão relacionados com os obstáculos. Erros ligados às operações intelectuais implicadas. Erros devidos aos processos adotados: quando o aluno se afasta do processo dado na aula. Erros devidos à sobrecarga cognitiva na atividade: estão relacionados com o facto de que a capacidade de reter na memória a informação é limitada. Erros que têm a sua origem noutra disciplina: derivam do conhecimento de outras disciplinas que se exigem para dar resposta a uma pergunta. Erros causados pela complexidade do conteúdo.
Brosseau (2001)	Erro a um nível prático: quando o professor considera que são erros de cálculo. Erro na tarefa: quando o professor os atribui a um descuido. Erro de técnica: quando o professor crítica a execução de um procedimento conhecido. Erro de tecnologia: quando o professor crítica a escolha da técnica. Erro de nível teórico: quando o professor culpabiliza os conhecimentos teóricos do aluno que servem de base à tecnologia e às técnicas associadas.

Neste quadro verifica-se que as dificuldades relacionadas com a linguagem aparecem categorizadas tanto por Radatz, Movshovitz e Socas. Outra categoria, comum a Radatz, Socas e Astolfi, são erros relacionados com obstáculos. Os erros de cálculo são também referidos por Movshovitz e Brosseau.

Existem outras perspetivas para categorizar o erro. Torre (1993, in Vale, 2010) refere um Modelo de Análise Didática dos Erros (MADE) onde se reconhecem as principais dimensões e categorias do erro. O autor descreve as dimensões dos erros, tendo em conta: *Entrada*, *Organização da informação* e *Execução*. A primeira dimensão ocorre quando "existe um problema de insuficiência ou inadequação da informação nalgum destes três planos: intenção, perceção, compreensão" (Torre, 1993, p. 132, in Vale, 2010). A dimensão de organização da informação contempla os erros que têm lugar quando “o sujeito trata de combinar a informação que dispõe para encontrar a resposta ao que se pede. As principais operações que ocorrem (…) são as de isolar elementos (análise), combiná-los de diferentes maneiras (síntese), associá-los com conhecimentos prévios (conexão), ordená-los corretamente (sequência)” (p. 141). Por fim, relativamente à terceira dimensão, Torre (1993, in Vale, 2010) define erros de execução como aqueles que “têm a ver com a atitude e estilo da pessoa. Têm lugar quando o sujeito se aventura por caminhos novos, novas estratégias, procedimentos não familiares” (p. 147). A este propósito, o autor refere ainda que enquanto uns optam “por caminhos seguros outros mais aventureiros ensaiam outras vias” (p. 147).

Hall (2002, in Vale, 2010) faz a seguinte sistematização de um conjunto de erros em Álgebra: (1) erros por eliminação (deletion), que resultam da realização de uma generalização excessiva de algumas operações matematicamente válidas em domínio mais restritos. Um exemplo deste erro é simplificar $39\,x - 4$ como $35x$ ou $2xy - 2x$ como y; (2) erros por troca de membros (switching addends), que consistem, por exemplo, em se considerar a equação $x + 37 = 150$ e a sua resolução passar pela transformação em $x = 37 + 150$; (3) erros por redistribuição (redistribution), por exemplo, ao considerar a equação $x + 10 = 25$, os alunos subtraem 10 ao primeiro membro e adicionam 10 ao segundo, obtendo a equação $x + 10 - 10 = 25 + 10$ e (4) erros por transposição (transposing error), em que a ênfase (na simetria) está ausente (Vale, 2010, p. 39).

Ainda Hall (2002, in Vale, 2010) refere que existem determinados erros que ocorrem com frequência suficiente para merecerem uma categoria de erro. É o caso dos erros de exaustão (exhaustion errors) e a ausência de estrutura (absence of structure). Os erros de exaustão, ocorrem com mais frequência próximo do fim da resolução A ausência de estrutura é um erro em que se verifica uma confusão estrutural, tanto no uso de um sinal de igual, como na aplicação de algoritmos (Vale 2010, p. 40).

Quadro 2 – Sistematização de erros (Hall, 2002a, 2002b)

Categorização	Exemplos
(1) erro por *eliminação (deletion)*	Simplificar $39x-4$ como $35x$ ou $2xy-2x$ como y
(2) erro por troca de membros *(switching addends)*	$x+37=150$ e a sua resolução passar pela transformação em $x=37+150$
(3) erro por *redistribuição (redistribution)*	$x+10=25$, os alunos subtraem 10 ao primeiro membro e adicionam 10 ao segundo, obtendo a equação $x+10-10=25+10$
(4) erro por *transposição (transposing error)*	$x+\frac{5}{2}=3 \Leftrightarrow x+5=6$
(5) erro na aplicação da *operação inversa*	$4x=1$ $x=1-4$
(6) erro de *divisão (division)*	$3x=2$ $x=1{,}5$
(7) erro de *exaustão (exhaustion error)*	$\frac{x^2+5x+6}{x^2-2x-8}=\frac{(x+3)(x+2)}{(x-4)(x+2)}=\frac{x+3}{x-4}=\frac{3}{-4}$
(8) erro de ausência de estrutura *(absence of structure)*	$5x+x+2=3x+12 \Leftrightarrow 3+2=3x-8$

Num estudo realizado por Matz (in Vale, 2010) foi usada uma outra categorização: (1) erros que correspondem à ausência de mudanças concetuais (que incluem os erros de concatenação e os erros relativos à prioridade das operações e uso de parêntesis) e (2) erros ligados às técnicas de extrapolação (integra os erros onde se verificam aplicações de regras que são válidas num contexto, mas desajustadas noutro).

Ponte (2009) sistematiza os erros e dificuldades mais comuns no Quadro 2.

Quadro 3 – Erros e dificuldades dos alunos na resolução de equações do 1.º grau

Adição de termos que não são semelhantes e Interpretação dos sinais "+" e "=" como indicadores de uma acção	$3+4n=7n$ $2a+5b=7ab$	Booth, 1984, 1988 Kieran, 1981, 1992 Küchemann, 1981 MacGregor e Sta-cey, 1997
Interpretação incorrecta de monómios do 1.º grau	Interpretação de $4y$ como: – quatro "y 's"; – um número com quatro dezenas e um número desconhecido de unidades; – $4+y$ por analogia com $3\frac{1}{2}=3+\frac{1}{2}$.	Booth, 1984
Uso de parêntesis	$3(x+2)=7x$ $\Leftrightarrow 3x+2=7x$	Kieran, 1992 Socas, Machado, Palarea e Hernandez, 1996

Não saber como começar a resolver uma equação		Kieran, 1985
Não respeitar a convenção de que várias ocorrências da mesma incógnita represen-tam o mesmo número		Kieran, 1985
Adição incorrecta de termos semelhantes	$-2x+5x=8 \Leftrightarrow -7x=8$	Kieran, 2006
Adição incorrecta de termos não semelhantes	$2x+5=x+8 \Leftrightarrow 7x=9$	Kieran, 1985
Transposição incorrecta de termos	$16x-215=265 \Leftrightarrow 16x=265-215$ $30=x+7 \Leftrightarrow 30+7=x$ $3x+5=2x \Leftrightarrow 3x=2x+5$ $7x=x+8 \Leftrightarrow 7-8=x+x$	Kieran, 1985, 1992
Redistribuição (*Redistribution*)	$-2x+5=8 \Leftrightarrow -2x+5-5=8+5$	Kieran, 1992
Eliminação	$3x-3=2x-4 \Leftrightarrow x=2x-4$	Kieran, 1992
Conclusão incorrecta da resolução da equação	$6x=24 \Leftrightarrow 6+x=24$ $11x=9x=\frac{11}{9}$ $2x=4 \Leftrightarrow$ *i)* $x=4-2$; *ii)* $x=\frac{4}{-2}$; *iii)* $x=\frac{2}{4}$ $-x=-17 \Leftrightarrow ??$ $-x=4 \Leftrightarrow ??$	Kieran, 1985, 1992 Lima e Tall, 2008 Vlassis, 2001

A lista indicada não pretende ser exaustiva mas apenas indicativa. Importa, sobretudo, que o professor esteja alerta para a possibilidade de ocorrência de algumas destas situações e de outras dificuldades dos alunos, tendo em conta que elas podem estar relacionadas com as experiências vividas nas suas aulas (Ponte, 2009).

2.5 Síntese

Existem diferentes conceções sobre a álgebra. Este estudo está inserido na conceção da álgebra, identificada por Usiskin (1995), como um estudo de procedimentos para resolver certos tipos de problemas.

O conceito de igualdade abrange a equivalência entre expressões algébricas ou aritméticas que compõem uma equação. Além de ser atribuído, ao sinal de igual, um significado operacional, em que é sinónimo de *efetue*, este símbolo tem também um significado relacional.

Considerar que numa equação ambos os membros têm o mesmo valor não é suficiente para garantir que o aluno segue um processo adequado para resolver equações. Além disso, na resolução de equações, cada equação pode ser substituída por uma equação equivalente, mas nada garante a compreensão de que tenham o mesmo conjunto solução.

Uma questão que se coloca é de como abordar a noção de equivalência, se à partida não é evidente que o princípio de interpretar o sinal de igual como uma relação de equivalência se expressa.

Para o estudo dos princípios de equivalência e regras práticas da resolução de equações são usados dois modelos: o modelo das balanças (Filloy & Rojano, 1989; Vlassis, 2002, in Lima, 2007), e o modelo geométrico (Filloy & Rojano, 1989, in Lima, 2007).

A noção de equação como igualdade entre duas expressões, em que alguns valores são desconhecidos" aparece no 3º ciclo. Neste ciclo o aluno já deve conseguir analisar se determinado valor é ou não solução, e que duas equações são equivalentes se tiverem o mesmo conjunto-solução.

Para resolver equações de 1º grau os alunos podem seguir vários métodos, entre os quais: i) o método do encobrimento; ii) o método de desfazer ou efectuar a operação inversa; iii) o método da substituição por tentativa erro; iv) os métodos informais que incluem transpor ou efetuar a mesma operação em ambos os lados da equação.

Muitas dificuldades dos alunos ao resolverem equações de 1º grau devem-se à falta de compreensão do significado de equações equivalentes, levando os alunos a cometerem erros. Muitos professores consideram ainda, que o erro é uma limitação dos alunos. Contudo, é necessário identificar o erro para tornar a avaliação mais produtiva em relação ao fracasso escolar. Partindo de uma reflexão que considere os erros como parte integrante do processo de ensino-aprendizagem requer uma análise mais apurada da sua produção. O trabalho do professor deve ser investigativo, tratando os erros de natureza distinta com diferentes condutas pedagógicas (Lima, 2010; Santos et al., 2010).

Concluindo, Davis e Espósito (1990, p. 7, in Lima, 2010) afirmam que os professores devem

> [...] aceitar soluções erradas como pertinentes, desde que indicadoras de progressos na atividade cognitiva; fazer com que os alunos tomem consciência dos erros cometidos, percebendo-os como problemas a serem superados, sem que se lhes imponha caminhos previamente traçados.

3. A Unidade

3.1. A turma

Este projeto foi desenvolvido na escola Escola EB 2,3 Fernando Pessoa, na turma 2 do 7.º ano, no 3.º período do ano letivo 2011/2012.

A turma é constituída por 29 alunos, catorze raparigas e quinze rapazes. Quatro rapazes e uma rapariga têm 10/11 anos, onze rapazes e treze raparigas têm 12/13 anos (Fig. 1).

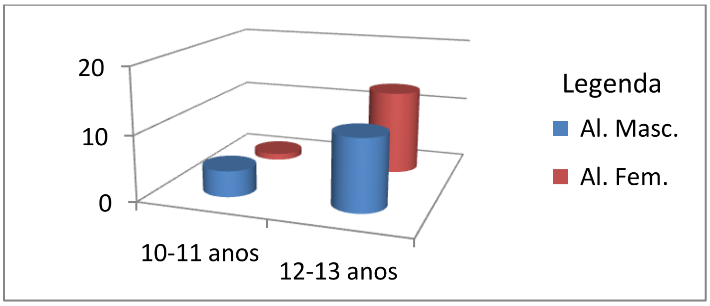


Fig.1 Composição etária da turma

Todos os alunos provêm de turmas do 6.º 1.ª, 2.ª e 3.ª desta mesma escola, exceto uma aluna com retenção no 3.º ciclo. Uma aluna teve também retenção no 2.º ciclo.

Quanto a ASE, existem cinco alunos escalão A e cinco alunos escalão B.

Os pais são maioritariamente portugueses. Existem dois pais, um de um país de África e outro do Brasil, e uma mãe também oriunda de África (Fig. 2).

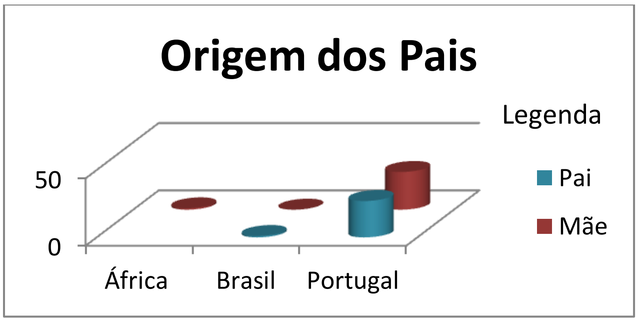


Fig. 2 – Naturalidade dos pais

Quanto aos pais, 21 estão empregados, quatro desempregados e um a usufruir de pensão. Quanto às mães, 22 trabalham, duas são desempregadas, e um recebe o rendimento de Inserção Social (Fig. 3).

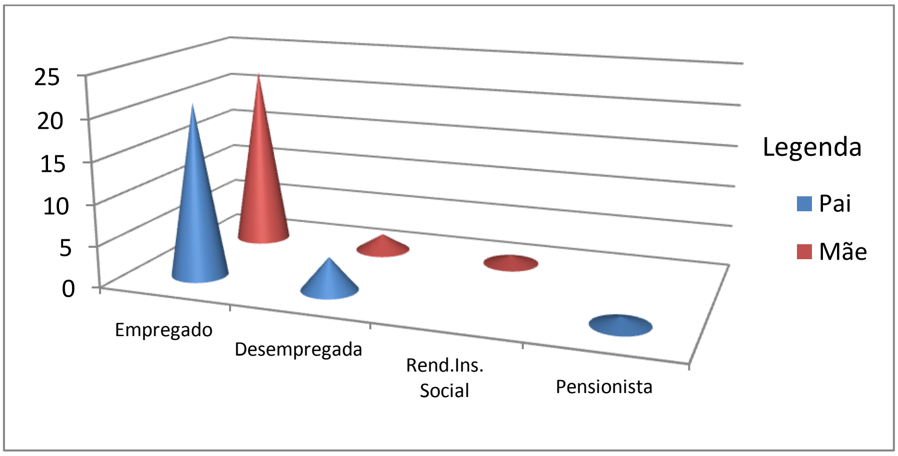


Fig.3 Estrutura profissional dos pais

Relativamente às expetativas, seis alunos pretendem terminar o 12.º ano, um aluno pretende ir para um curso técnico profissional, e 22 alunos pretendem ir para a Universidade (Fig. 4).

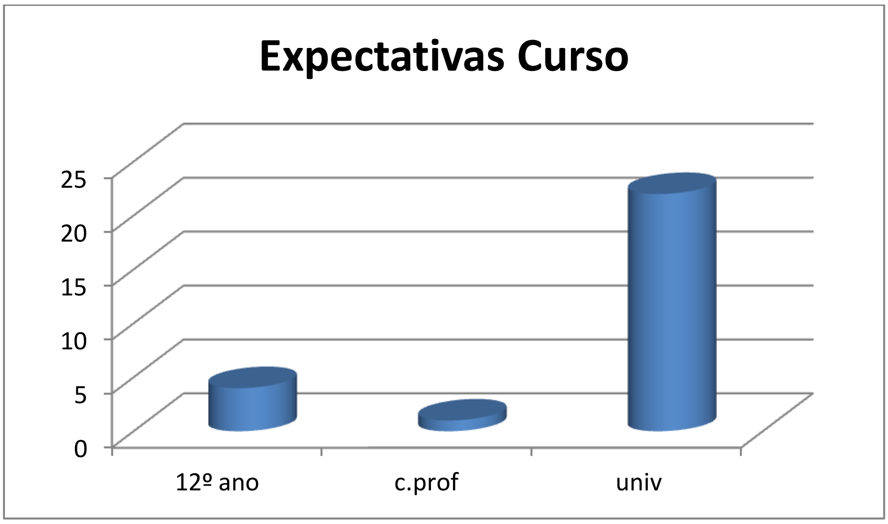


Fig. 4 Expetativas futuras do curso pretendido

Existem três alunos que estudam sozinhos, 24 estudam acompanhados por adultos, e dois alunos com outros (Fig. 5). Quanto ao local de estudo, 26 estudam em casa e seis em centros de estudo.

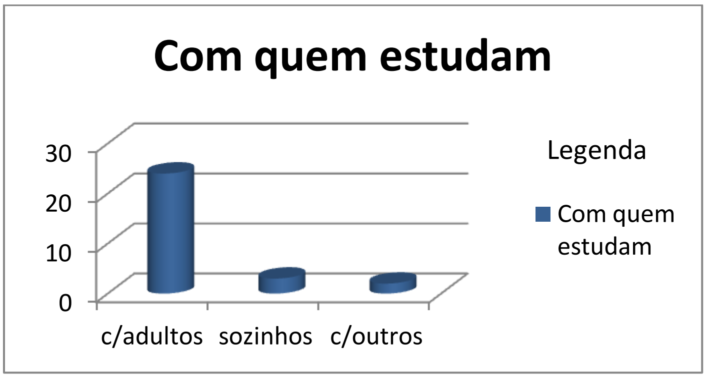


Fig. 5 - Tipo de estudo

Os alunos que vão de carro para a escola são dezoito, seis vão a pé e cinco de transportes públicos (Fig.6)

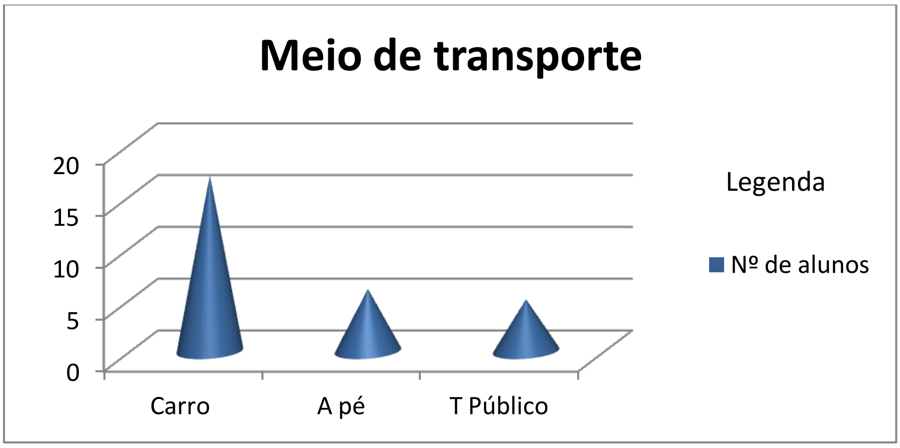


Fig.6 – Meio de transporte utilizado

Dezassete alunos demoram menos de 10 minutos, e onze alunos demoram entre 11 a 30 minutos a chegar à escola (Fig. 7).

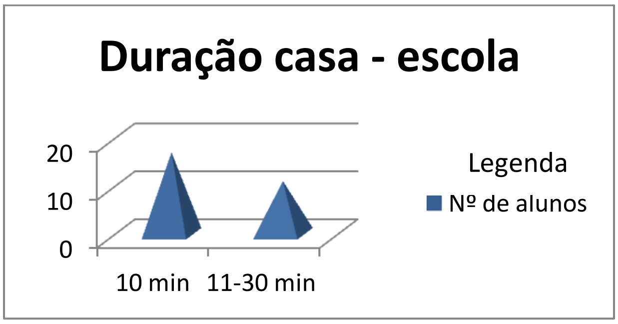


Fig.7 – Duração do trajeto casa-escola

Os níveis atingidos na disciplina de Matemática no 1.º período distribuíram-se do seguinte modo: nove alunos com nível 2, sete alunos com nível 3, sete alunos com nível 4, cinco alunos com nível 5 (Fig. 8).

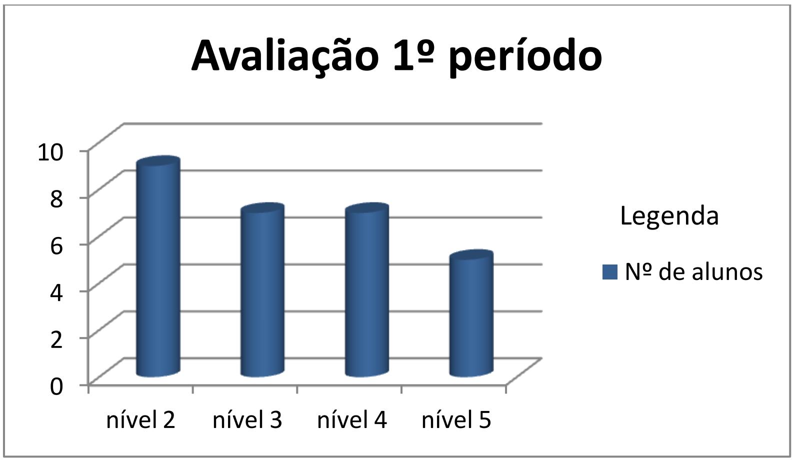


Fig. 8 - Níveis atingidos no 1.º período

Os níveis atingidos na disciplina de Matemática no 2.º período distribuíram-se do seguinte modo: sete alunos com nível 2, nove alunos com nível 3, cinco alunos com nível 4, sete alunos com nível 5 (Fig. 9).

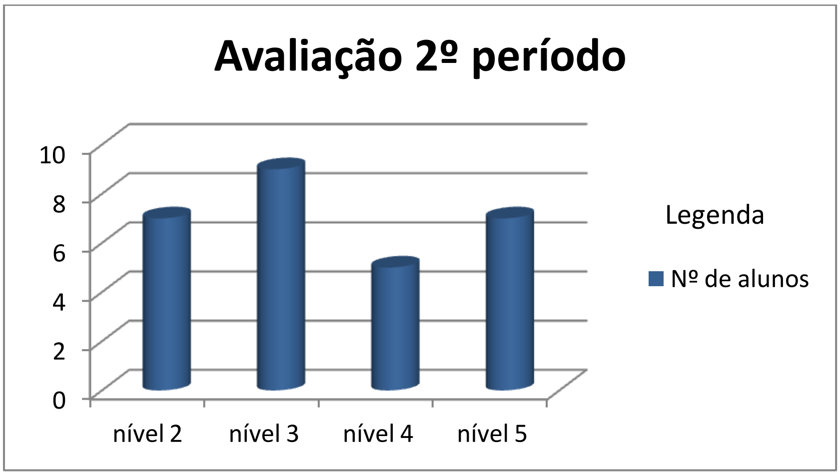


Fig. 9 - Níveis atingidos no 2.º período

Ao analisar estes gráficos podemos verificar que houve um aumento do desempenho dos alunos do 1.º para o 2.º período. Houve menos níveis negativos, e os níveis 5 aumentaram.

3.2. Ancoragem da unidade

A Unidade das Equações está inserida no Programa de Matemática do 7.º ano, e foi lecionada posteriormente às Unidades 1 – Números Inteiros e à Unidade 2 – Sequências e Regularidades e Funções.

Destas unidades, em particular, no final na Unidade 1 – Números Inteiros, segundo o Programa de Matemática para o Ensino Básico (DGIDC, 2007), o aluno deve ser capaz de:

- Traduzir situações com números inteiros de linguagem natural para linguagem matemática;
- Comparar e ordenar números inteiros;
- Representar racionais não negativos na reta numérica;
- Utilizar as propriedades das operações em *Z* no cálculo de expressões numéricas;
- Justificar a regra da potência da potência (base e expoente naturais) e aplica-a no cálculo;
- Calcular o valor de potências em que a base (diferente de zero) e o expoente são números inteiros;
- Justificar a relação entre as potências de base e expoente natural com as potências de base inteira e expoente natural;
- Resolver problemas e investigar regularidades envolvendo potências;
- Identificar a raiz quadrada e a raíz cúbica de quadrados e cubos perfeitos até 200;
- Calcular a raíz quadrada e a raíz cúbica utilizando a calculadora, no contexto de resolução de problemas;
- Relacionar potências e raízes.

Toda esta unidade serve de base para o trabalho a desenvolver nas unidades seguintes.

No final da Unidade 2 – Sequências e Regularidades, , segundo o Programa de Matemática para o Ensino Básico (DGIDC, 2007), o aluno deve ser capaz de:

- Identificar a relação entre cada termo da sequência e a respetiva ordem;

- Representar o termo geral de uma sequência numérica que envolva expressões polinomiais do 1.º grau, usando símbolos matemáticos adequados;
- Determinar termos de várias ordens a partir do termo geral;
- Simplificar expressões algébricas como n-(4-2n);
- Traduzir relações de linguagem natural para linguagem matemática, dando sentido aos símbolos usados;
- Relacionar as diferentes representações de uma sequência (tabela, gráfico, termo geral, lei de formação escrita em linguagem natural);
- Distinguir "variável" de "constante" .

Estas unidades estão interligadas com a Unidade 5, pois usar símbolos matemáticos adequados, simplificar expressões algébricas e traduzir relações de linguagem natural para linguagem matemática, dando sentido aos símbolos usados, são alicerces fundamentais para o estudo das Equações. A aprendizagem da simplificação de expressões algébricas deve ser progressiva e recorrer a situações que permitam aos alunos compreender a manipulação simbólica envolvida, por exemplo, efetuando cálculos a partir de expressões algébricas substituindo as letras por valores numéricos.

No final da unidade espera-se que o aluno tenha atingido as metas acima enunciadas.

Na Unidade em questão, a Unidade 5 – Equações, pretende-se que o aluno

- Distinga "expressão algébrica" de "equação";
- Identifique uma equação e a respetiva solução;
- Relacione os significados de "membro" e "termo", e de "incógnita" e "solução" de uma equação;
- Identifique equações equivalentes;
- Resolva equações do 1.º grau utilizando as regras de resolução;
- Resolva equações do 1.º grau incluindo casos em que: 1) a incógnita está presente num ou em ambos os membros da equação; 2) envolvam parênteses;
- Resolva e formule problemas envolvendo equações do 1.º grau;
- Adeque a solução obtida na resolução de uma equação ao contexto do problema.

3.3 Conceitos matemáticos fundamentais

A unidade lecionada foi a unidade das equações. Segundo o PMEB (DGIDC, 2007), é importante que os alunos compreendam a noção de equação e, em particular, de solução de uma equação e de equações equivalentes. Outro objetivo relaciona-se com a resolução de equações de 1.º grau, utilizando os princípios de equivalência. Pretende-se ainda que o aluno distinga uma "expressão algébrica" de uma "equação".

As equações de 1.º grau são um caso particular das equações algébricas. Equações algébricas são equações em que as incógnitas são submetidas apenas às chamadas operações algébricas, ou seja, soma, subtração, multiplicação, divisão, potenciação inteira e radiciação, utilizando letras e números (Garbi, 2009).

Ora, uma equação é uma afirmação matemática formada por uma igualdade composta por expressões matemáticas contendo ao menos uma incógnita. Cada uma das expressões da igualdade contém termos independentes e incógnitas. Os termos independentes são os valores determinados. As incógnitas são os valores desconhecidos que dependendo do valor que assumam, podem tornar a equação verdadeira ou falsa (Matemática didática).

Uma expressão matemática é uma combinação de números, operadores, símbolos gráficos e variáveis livres ou ligadas agrupadas de forma significativa de modo a permitir a verificação de valores, formas, meios ou fins. Um caso particular é a expressão algébrica, geralmente utilizada para monómios ou polinómios. Monómios são expressões matemáticas especiais envolvendo valores numéricos e literais, onde podem aparecer somente operações de adição, subtração ou multiplicação (Santos, Sodré, 2005). Em geral um monómio é formado por uma parte numérica, que é chamada de coeficiente, e de uma parte literal constituída pelas letras e seus expoentes.

Resolver uma equação é procurar o valor (ou valores) da incógnita que tornam a igualdade verdadeira. A cada um desses valores chama-se raiz ou solução da equação (Conceição, 2010)

Duas equações dizem-se equivalentes quando têm a mesma solução, ou seja, possuem o mesmo conjunto solução (Conceição, 2010). Aplicando os Princípios de Equivalência os alunos também obtêm equações equivalentes. Os Princípios de Equivalência são um procedimento para resolver equações de 1º grau. O 1º Princípio de Equivalência enuncia-se do seguinte modo: Se adicionarmos ou subtrairmos a mesma quantidade a ambos os membros de uma equação obtemos uma equação equivalente. O 2º Princípio de Equivalência diz-nos que se multiplicarmos ou dividirmos ambos os membros de uma equação por um número diferente de zero, obtemos uma equação equivalente. A regra da adição (Numa equação, podemos mudar um termo de um membro para o outro se lhe trocarmos o sinal) não foi enunciada (Conceição, 2010).

Outro procedimento para resolver equações de 1º grau é a redução de termos semelhantes. Termos semelhantes são os termos independentes, ou os termos com incógnita. Para simplificar a escrita, podemos reduzir os termos semelhantes usando a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição. (Conceição, 2010).

3.4 Estratégias de ensino

Segundo o PMEB (DGIDC, 2007), os objetivos específicos do capítulo da álgebra são: compreender as noções de equação e de solução de uma equação e identificar equações equivalentes; e resolver equações de 1º grau. Uma das estratégias utilizadas para introduzir a noção de equação foi a utilização dos materiais Hands-on-equations. Este material inclui uma balança grande (descrito no capítulo dos materiais), visível a toda a turma, onde se representaram diferentes tipos de equações. Partindo de exemplos mais simples e aumentando a complexidade, o aluno vê fisicamente como se trabalha a resolução de equações. Optei por usar este material pela sua utilidade e pela facilidade de manipulação, indo ao encontro do objetivo específico que era a compreensão da noção de equação.

Optei pelo trabalho a pares, por um lado porque só havia um kit por carteira, e por outro para permitir a discussão entre os alunos. Um terceiro motivo do método de trabalho a pares foi permitir a possibilidade de pedir ao par de alunos para ir ao quadro resolver a equação. Enquanto um deles manipulava a balança, o seu colega fazia a representação pictórica e paralelamente a representação algébrica no quadro. Abriu-se a discussão à turma e os dois alunos explicaram oralmente aos colegas as conclusões e os resultados a que chegaram, praticando assim a capacidade transversal comunicação matemática. Este procedimento foi constante na resolução das equações que se seguiram. Houve sempre discussão coletiva do que se estava a passar, na balança, e no quadro. A discussão coletiva é sempre útil pois permite aos alunos expressarem oralmente os seus resultados à turma. É aberto espaço ao erro permitindo a sua exploração, a sua compreensão e a sua superação, contribuindo para uma aprendizagem mais lucrativa.

Após a resolução de exercícios sobre equações, passou-se à resolução de problemas, aumentando a complexidade, quer do problema, quer da equação em si.

A tradução da linguagem corrente para a linguagem matemática foi uma dificuldade revelada pelos alunos que foi ultrapassada abrindo a discussão à turma e analisando as hipóteses que o enunciado indicava. Interpretando o enunciado e identificando os dados e o objetivo do problema, foram elaboradas pelos alunos uma ou mais estratégias de resolução. Foi pedido que o aluno expressasse os resultados, tanto oralmente, como por escrito, e discutisse os resultados a que chegou com a turma.

Segui sempre a mesma estrutura de aula: a aula começou sempre com uma breve síntese das aulas anteriores, e por vezes, com a correção do trabalho de casa. Pretendia com isto verificar se o aluno tinha alguma dúvida sobre a matéria das aulas anteriores, verificando também as dúvidas que surgiram na resolução do trabalho de casal. Houve aulas em que, no início, se introduziram novas noções e conceitos sobre os quais se resolveram exercícios no decorrer da aula, ou em aulas seguintes para consolidação. Em aulas posteriores foram resolvidos problemas envolvendo equações de 1.º grau. As aulas terminaram sempre com uma breve síntese do tema dessa aula para verificar se a matéria referente a cada aula foi compreendida pelos alunos.

3.5 Situações, tarefas e materiais utilizados

3.5.1 Materiais

Para introduzir a noção de equação, mais particularmente, a solução de uma equação e equações equivalentes recorri inicialmente aos materiais Hands-on-equations. Para representar as incógnitas os materiais incluem 8 pins azuis (para representar x), e 8 pins brancos (para representar –x). Os termos independentes são representados por dados vermelhos (para representar números positivos) e dados verdes (para representar números negativos). Existem 2 dados, de cada cor, de 0 a 5, e dois dados, de cada cor, de 5 a 10.

Inicialmente foi representado na balança, no 1.º membro, uma incógnita, que a este ponto significava "um número desconhecido", e no 2.º membro, um dado vermelho (o número 5). A questão foi saber qual o valor do pin azul para que a balança estivesse em equilíbrio. A resposta foi unânime, o pin deveria valer 5. Esta primeira representação foi bastante útil para que os alunos percebessem o sentido de equilíbrio entre os pratos da balança.

Os exemplos foram aumentando de grau de dificuldade. Num segundo exemplo, já apareciam dois pins azuis no 1.º membro e um dado vermelho com o número 8. Qual o valor de cada pin (isto é, o valor da incógnita)? Num terceiro exemplo já apareceram incógnitas em ambos os membros. Procurei que, a partir destes exemplos, os alunos percebessem que resolver uma equação é procurar o valor (ou valores) da incógnita que tornam a igualdade verdadeira, sendo esse valor a raiz ou solução da equação.

Os pratos da balança foram também uma mais-valia para a compreensão do significado de membro. A partir daqui foi fácil introduzir o conceito de termo, e de termo com incógnita e termo independente.

Dada a apresentação da balança, foram distribuídos aos alunos um kit por mesa (o kit é composto por uma folha de cartolina representando a balança e 8 pins azuis e 8 pins brancos, 4 dados vermelhos e 4 dados verdes, significando o que já foi referido), de modo a resolver a Tarefa 1 (ver Anexo 1). Os alunos puderam manusear os kits, resolvendo fisicamente as equações em questão. A partir destes exercícios foi fácil introduzir a noção de equações equivalentes como sendo equações que têm as mesmas soluções.

A representação na balança em que há incógnitas e/ou termos independentes em ambos os pratos (em ambos os membros da equação), sugere que retiremos (somar ou subtrair) determinada incógnita ou termo independente dos pratos. Com a balança pretendeu-se visualizar, fisicamente, que o equilíbrio (a igualdade) só se mantém se forem retirados a ambos os membros a mesma quantidade. Assim foi possível introduzir o 1º princípio de equivalência como estratégia de resolução de equações.

Se na balança tivermos (algebricamente) $4x = 8$, foi possível verificar que $x+x+x+x=2+2+2+2$, isto é, se temos quatro valores desconhecidos iguais, iguais a quatro valores 2, cada x deve valer 2. Posteriormente o princípio de que podemos multiplicar ou dividir a ambos os membros de uma equação uma quantidade diferente de zero, obtemos uma equação equivalente, foi enunciado como o 2.º princípio de equivalência.

Após compreensão dos princípios de equivalência foi possível justificar que se uma equação é obtida(s) da(s) anterior(es) pelos princípios de equivalência, então elas são equivalentes.

Outra mais-valia destes materiais foi na resolução de equações com parênteses. O aluno que não estivesse recordado da propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição, poderia sempre recorrer à balança para, por exemplo, representar 3(x+2) como x+2 + x+2 + x+2, e, a partir daí, resolver a equação aplicando os princípios de equivalência.

3.5.2 Tarefas

A Tarefa 1 (ver Anexo 1) permitiu aos alunos, através da manipulação dos materiais, chegar à noção de equação. Esta tarefa foi também escolhida porque aparecem já situações em que temos, quer termos independentes, quer termos com incógnita em ambos os pratos da balança, isto é, os membros da equação. Aqui foi colocada a questão: Se retirarmos a ambos os membros uma peça desconhecida, há alteração na igualdade? O objetivo era munir os alunos de uma estratégia que permitisse a obtenção de uma equação equivalente e que facilitasse encontrar o valor da incógnita. O aluno que avançou com esta hipótese foi convidado a explicar aos colegas os seus resultados.

Esta tarefa foi também escolhida porque, além da noção de equação, membros e termos, foi útil na introdução da noção de solução (ou raíz) da equação e de equações equivalentes. Também foi uma mais-valia para introduzir a noção de equações equivalentes. Além disso, esta tarefa tinha uma 2.ª parte com equações onde já se trabalhava os 1.º e 2.º Princípios de Equivalência. Concluindo, esta tarefa foi selecionada por ser muito apropriada e abrangente para a introdução das equações.

A Tarefa 5, pág. 168, do manual (ver Anexo 2) foi escolhida com intuito de dar seguimento à anterior. Com esta tarefa pretendia-se que os alunos compreendessem as noções de equação e de solução de uma equação e que identificassem equações equivalentes, conceitos que deveriam ter adquirido na tarefa anterior. Através desta tarefa, foi possível saber se o aluno estava a acompanhar ou se estava a ter dificuldades nesta matéria. Pelo que pude observar, a maior parte dos alunos compreendeu o que se pretendia, pois mostraram-se interessados e participativos, intervindo adequadamente.

Terminada esta tarefa, e após a introdução dos 1.º e 2.º Princípios de Equivalência, propus aos alunos duas equações. As equações foram escolhidas de modo a analisar a compreensão e a aplicação dos princípios de forma correta por parte dos alunos.

Os Exercícios 1 e 9, pág. 166, do manual (ver anexo 3) foram propostos para trabalho de casa. Com estes exercícios pretendia que os alunos trabalhassem as noções de 1.º e 2.º membro e termos independentes e com incógnita. Além disso, pretendia que o aluno verificasse se determinado valor era ou não solução da equação, pelo método de substituição. Estes exercícios foram escolhidos para serem resolvidos nesta altura para que o aluno pudesse consolidar os conceitos dados nas aulas anteriores.

Foram propostos os exercícios 2 e 7 a), b), c) e d), pág. 172, do manual (ver Anexo 4) No exercício 2 era pedido para o aluno traduzir a situação da balança por uma equação e encontrar o valor de x. Este exercício foi escolhido de modo a que, utilizando os materiais hands-on-equations, os alunos pudessem manipular fisicamente a balança (a equação) e paralelamente trabalhassem a representação pictórica e algébrica dessa mesma equação. Este exercício pareceu-me pertinente pois no enunciado aparecem as balanças com as quais os alunos já lidaram. Foi fácil assim a tradução das situações por equações. Já no exercício 7, era pedido o conjunto solução das equações dadas. Este exercício foi selecionado de modo a que os alunos praticassem a resolução de equações. Todas as equações (alíneas a), b), c) e d)) foram representadas na balança e resolvidas pictórica e algebricamente pelos alunos.

O Exercício 2 a), pág. 175, e Exercício 4 a) e c), pág. 179, do manual (ver Anexo 5). Estes exercícios foram propostos visando a consolidação da resolução de equações com parênteses.

Um objetivo de aprendizagem era a resolução de problemas usando equações de 1º grau. Este objetivo foi atingido resolvendo os Problemas 1 a), pág.175, Problemas 3 e 5, pág. 178, Problemas 1, 2 e 4, pág. 178 e Problemas 8 e 9, pág. 179, do manual (ver Anexos 6, 7, 8 e 9). Todos estes Problemas foram propostos visando atingir as capacidades transversais: Resolução de problemas (compreensão do problema (identificar os dados, as condições e o objetivo do problema), conceção, aplicação e justificação de estratégias) e Comunicação matemática (Interpretação e representação de ideias e conceitos representados de diferentes formas; expressão de resultados, processos e ideias matemáticas, oralmente e por escrito, utilizando a notação, simbologia e vocabulário próprios; e discussão de resultados, processos e ideias). Todos estes problemas exigem ao aluno a tradução da linguagem corrente para a linguagem matemática.

3.6. Descrição sumária das aulas

12 Abril:

Na generalidade, a aula correu como previsto (ver Anexo 12). Após discussão em grupo, chegou-se à noção de equação, que era um dos objetivos específicos previstos para esta aula. Foram utilizados os materiais Hands-on-equations, partindo de uma representação física e sua interpretação. No início foi dado um exemplo muito simples, para que o aluno procurasse o significado de tal representação. Este exemplo consistia numa representação em que só figuravam incógnitas num dos membros e termos independentes no outro membro (situação 1, ver Anexo 12). A introdução destes conceitos foi outro objetivo específico que foi atingido nesta aula. A seguir foi proposta uma situação mais complexa (situação 3, ver Anexo 12), onde já ocorrem termos com incógnitas e termos independentes em ambos os membros. O aluno, a esta altura tenta resolver tal situação por tentativa para $x = 1$, $x = 2$, etc.

Após esta introdução, foram distribuídos aos alunos os materiais Hands-on-equations, para que, a pares, pudessem manipular os materiais. Foi também distribuída uma tarefa (Tarefa 1, ver Anexo 1) para resolver com o auxílio dos materiais. Foi pedido a todos os alunos que registassem todos os passos que originaram a solução obtida tal como a sua verificação. O conceito de solução (ou raíz) foi também introduzido nesta fase tendo cumprido o objetivo específico do significado de solução.

Na minha opinião estes materiais são uma mais-valia para introduzir as equações a este nível de ensino. O aluno pode compreender e ver fisicamente os passos para chegar à solução de uma equação. Manipulando estes materiais os alunos, numa primeira fase, começaram, com o auxílio da balança, a somar o simétrico, quer de um termo independente, quer de um termo com incógnita, de forma a anular o seu valor e retirá-los da balança, mantendo o equilíbrio. Um dos objetivos desta aula, muito importante, era que o aluno compreendesse a noção de equilíbrio, isto é, de igualdade entre os dois membros da balança (da equação).

Com a ajuda dos alunos foi feita uma síntese dos conceitos introduzidos nesta aula.

A planificação não foi toda cumprida: a Tarefa 4 (pág.161) não foi resolvida, ficando para trabalho de casa. Estava planeado também propor para trabalho de casa a resolução dos exercícios 2 e 3 (pág. 164) do manual.

<u>16 Abril:</u>

No início da aula foram revistos os conceitos introduzidos na aula anterior. Foi importante esta pequena revisão, para compreender se havia, e quais, as dúvidas que ainda podiam existir.

Aproveitando também a Tarefa 1 da última aula, foi introduzido o conceito de equações equivalentes, tendo sido verificado que as equações 4), 7) e 8) eram equivalentes, e as equações 6), 9) e 10) também o eram equivalentes. Foi atingido esse objetivo específico.

O exemplo da última aula (situação 3, ver Anexo 12) foi retomado para que os alunos paralelamente à representação pictórica passassem para a representação algébrica. As duas representações foram bastante úteis para compreender a passagem do modelo físico, para a representação pictórica e posteriormente para representação algébrica.

Este exemplo foi também muito útil para introduzir os princípios de equivalência. Neste exemplo, em particular, e representado fisicamente na balança, foi introduzido o 1.º Princípio de Equivalência. Este princípio vai ao encontro do objetivo específico da introdução do 1º Princípio de Equivalência.

Num segundo momento, foi resolvida a Tarefa 5 (pág. 168, ver Anexo 2) a pares, com o recurso aos materiais Hands-on-equations. A Tarefa 5, questão 1, permitiu compreender as noções de equação e identificar equações equivalentes. Acho que esta questão foi bastante útil para que o aluno, com a manipulação das balanças, verificasse que somando ou subtraindo a mesma quantidade se obtinham equações equivalentes. O aluno verificou também que se efetuar qualquer operação que não as anteriores (como por exemplo, passar 2kg do prato da direita para o da esquerda), o equilíbrio não se mantinha.

Para resolver a questão 2, foi pedido aos alunos que registassem todos os passos que originaram a solução encontrada e também, igualmente importante, a sua verificação. Com a questão 2 desta Tarefa verifiquei se os alunos compreenderam e aplicaram corretamente o 1º Princípio de Equivalência.

Após a Tarefa 5, propus aos alunos dois exercícios. O primeiro exige a aplicação do 1º Princípio de Equivalência. O segundo exige a aplicação do 1º e do 2º Princípios de Equivalência. O primeiro exercício foi resolvido na aula com compreensão dos alunos. Foi pedida a representação física na balança da equação. A partir desta representação os alunos conseguiram passar à representação pictórica e paralelamente à representação algébrica. Foi bastante útil a resolução desta equação pois, além da aplicação do 1.º Princípio de Equivalência, ainda se fez a redução de termos semelhantes, conceito que foi introduzido posteriormente.

A resolução da 2ª equação não foi tão bem sucedida. Foi resolvida no final da aula, e enunciei o 2.º Princípio de Equivalência. Tenho a noção que este princípio não ficou bem percebido, tendo-o enunciado novamente, através de exemplos, na aula seguinte. Creio que os alunos ficaram com dúvidas quanto ao valor que se deve dividir o termo com incógnita e o termo independente. Expliquei na aula seguinte que se deveria dividir ambos os membros pelo valor do coeficiente de x (da incógnita), isto é, pelo número de vezes que a incógnita ocorre (ver balança).

Estava também planificado que no final da aula se retomasse a Tarefa 1 – Parte 2. Uma vez que a aula acabou na resolução da 2ª equação e pela introdução do 2.º Princípio de Equivalência, esta Tarefa não foi retomada, tendo ficado para a aula seguinte. Ficou para trabalho de casa a resolução dos exercícios 1 e 9 da página 166 do manual.

<u>17 Abril:</u>

Com a correção do trabalho de casa foram relembrados os conceitos de equação, membros e termos, incógnita, termos independentes, e solução de uma equação. Com esta correção verificou-se a consolidação destas noções.

No Ex. 1 (pág. 166, do manual, Anexo 3), alguns alunos manifestaram dúvidas quanto às letras que representam as incógnitas. Voltei a enunciar a definição de equação. Os alunos pareceram ficar a perceber que a incógnita pode ser representada por qualquer letra.

Para o Ex. 9 (pág. 166, do manual, ver Anexo 3), estava previsto que os alunos determinassem a solução das equações pelo método de substituição. Os alunos resolveram sem dificuldade o exercício que apenas exigia a substituição dos valores dados no enunciado na equação. Os alunos fizeram a verificação dos valores na respetiva equação e chegando a uma proposição verdadeira encontraram o valor da solução correta.

Passou-se à resolução da Tarefa 1 – Parte 2. Todas as equações foram representadas na balança fisicamente, representadas pictoricamente, e paralelamente, representadas algebricamente. Esta resolução foi feita a pares: um dos alunos manipulou os materiais da balança, enquanto o outro aluno expôs no quadro as representações pictórica e algébrica. Nas equações 1 e 3 foi aplicado o 1.º Princípio de Equivalência, e nas equações 2 e 4 foram aplicados os 1.º e 2.º Princípios de Equivalência. Pude verificar que os alunos assimilaram bem estes dois princípios e reduziram os termos semelhantes intuitivamente, uma vez que este conceito ainda não tinha sido introduzido.

Nesta aula foram atingidos os objetivos específicos: a noção de solução de uma equação foi verificada no Ex. 9, e os Princípios de Equivalência foram verificados na resolução da Parte 2 da Tarefa 1. A planificação sofreu uma alteração uma vez que os restantes exercícios da Parte 2 – Tarefa 1, não foram resolvidos, tendo ficado para trabalho de casa.

<u>19 Abril:</u>

Esta aula foi uma aula de exercícios de consolidação. Num primeiro momento, foi resolvido o Ex. 2 (pág. 172, do manual, ver Anexo 4). Pedia-se para traduzir por uma equação as situações que se seguiam e encontrar o valor de x (da incógnita). No enunciado estão representadas balanças com o objetivo de representar o equilíbrio entre os dois pratos, ou seja, da igualdade entre dois membros. Foram representados na balança física as balanças do enunciado.

Novamente a resolução foi feita a pares no quadro: um aluno manipulou os materiais da balança, enquanto outro aluno apresentou as representações pictórica e algébrica. Os alunos aplicaram os princípios de equivalência, encontraram o valor de x e fizeram a sua verificação. Este exercício foi relevante para que os alunos relembrassem a noção de solução e sua verificação; noção de equações equivalentes; os princípios de equivalência; e para introduzir a noção de termos semelhantes.

A partir de um exemplo, $6x + 3 = 2x + 11$, foi pedido aos alunos que reduzissem os termos semelhantes. No entanto, surgiram várias dificuldades, como por exemplo, escrever que $6x + 3 = 2x + 11 \Leftrightarrow 9x = 13x$. Reparei que este erro, adição de termos não semelhantes, é frequentemente cometido pelos alunos. Expliquei aos alunos que os termos independentes são os termos sem incógnita e que estes se podem agrupar (reduzir). Por outro lado, também expliquei, que existem os termos com incógnitas (os que contêm um letra) que também se podem agrupar entre si. Esclareci que não se pode reduzir termos que não são semelhantes, ou seja, não podemos somar (ou subtrair) termos independentes com termos com incógnitas pois estes não são semelhantes.

Nesta aula foram também resolvidas as equações do Ex.7 (pág. 172, do manual, ver Anexo 4). Pretendia-se que os alunos indicassem o conjunto solução de cada uma das equações. Estas equações foram ainda representadas na balança para que os alunos visualizassem, fisicamente, a resolução das equações. Os alunos ainda recorreram à representação pictórica, e posteriormente à representação algébrica. Houve também alunos que ainda tiveram dificuldades em entender uma equação em que a incógnita está representada por uma letra que não o x. Por exemplo, na questão 7.a) e b) a incógnita é m e t, respetivamente. Voltei a citar a definição de equação como sendo uma igualdade entre duas expressões que envolve pelo menos uma letra a representar um valor desconhecido. Expliquei (novamente) que o valor desconhecido, ou seja, a incógnita, pode ser representado por qualquer letra (normalmente minúscula).

A noção de equações equivalentes e os Princípios de Equivalência foram objetivos específicos que foram atingidos nesta aula. Na redução de termos semelhantes houve algumas dúvidas mas que pareceram ficar superadas após explicação.

<u>23 Abril:</u>

No início desta aula foi dada uma equação ($4x+3=2x+7$) para que os alunos identificassem o 1.º membro, o 2.º membro, os termos independentes e os termos com incógnita. Foram então revistos estes conceitos, já abordados em aulas anteriores.

Passou-se à resolução dessa equação. Os alunos fizeram a representação pictórica e, paralelamente, a representação algébrica. Todos os passos foram justificados tendo sido aplicados os 1.º e 2.º princípios de equivalência, e a redução de termos semelhantes. Também foi feita a verificação da solução.

Feita esta pequena revisão, passou-se à introdução das equações com parênteses. Foi dado um exemplo, 2(x+3) = x+10, onde, para ultrapassar as dificuldades de interpretar uma equação com parênteses, os alunos recorreram à balança para representar 2(x+3) como x+3 + x+3. A partir da balança, e respetiva representação pictórica, os alunos conseguiram resolver a equação algebricamente, aplicando os princípios de equivalência e redução de termos semelhantes. Após resolução da equação foi feita a verificação da solução.

De seguida foi proposto o Exercício 2 (pág. 175, do manual, ver Anexo 5), para o aluno consolidar a resolução de equações com parênteses. Foi apenas resolvida a alínea a) ficando as alíneas b) e c) para trabalho de casa. Estava também previsto a resolução do Problema 1 (pág.175) que também ficou para trabalho de casa.

O objetivo para esta aula era a resolução de equações com parênteses, objetivo este que foi atingido.

<u>24 Abril:</u>

Partindo da resolução do trabalho de casa (Ex. 2 e 3, pág. 175), onde se pedia para determinar o conjunto solução de cada uma das equações envolvendo parênteses, propus a resolução do Exercício 4 a) e c), da página 179 (ver Anexo 5). Optei por um exercício análogo ao trabalho de casa e não a sua correção, para evitar que quem tivesse resolvido o trabalho de casa ficasse sem trabalho. Assim sendo, propus à turma a resolução de duas equações muito similares às do trabalho de casa. O aluno que resolveu o trabalho de casa não teve dificuldades em resolver estas equações. Houve, no entanto, alunos que tiveram dificuldades em interpretar e entender a resolução de equações com parênteses. Por exemplo, no Ex. 4 a) 2x – 3(x – 4) = 5 + 4(2x + 1), houve alunos que não sabiam dar significado aos parênteses. Esta dificuldade foi ultrapassada pela interpretação física da balança, onde 3(x – 4) significava (x - 4) + (x - 4) + (x - 4), ou aplicando a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição. Esta propriedade já foi estudada em anos anteriores e supunha-se que o aluno já a soubesse aplicar. Nos casos em que não souberam aplicar, os alunos recorreram à balança.

Os alunos ainda continuaram a recorrer muito à balança. E os que o faziam tinham um entendimento mais apurado do sentido de equilíbrio, igualdade e equivalência. Perceberam que se efetuar a mesma operação (seja aplicar o 1.º ou 2.º princípio de equivalência) de ambos os membros da equação, isto é, nos dois pratos da balança, o equilíbrio mantém-se, ou seja, obtém-se uma equação equivalente.

Estes exercícios foram bastante produtivos, pois a partir da representação física na balança, os alunos conseguiram passar para a representação pictórica e paralelamente para a representação algébrica. Penso que os alunos ficaram mais esclarecidos quanto à resolução de equações com parênteses, indo ao encontro dos objetivos específicos.

Foi ainda iniciado o Problema 1 (pág. 175, do manual, ver Anexo 6). Com este problema, pretendia que o aluno passasse da linguagem corrente para a linguagem matemática. Os alunos traduziram facilmente o enunciado e resolveram, tanto pictórica, como algebricamente a equação traduzida. Para o aluno que não compreendeu, foi explicado passo a passo, primeiro o que era a diferença entre dois números: a subtração de um por outro, e depois o triplo, que significa que é três vezes a quantidade referida.

No final da aula ainda houve alunos a resolver a alínea b) do Problema 1.

Para esta aula, estavam planeados os Problemas 1. a), b) e c) (pág. 175); os Problemas 3 (pág. 178) e Problemas 2 e 4 (pág. 178). No entanto, na aula só foi resolvido o Problema 1a) (pág. 175), ficando o 1.b) e c) para trabalho de casa. Os Problemas 3 (pág. 178) e Problemas 2 e 4 (pág. 178), não foram referidos.

<u>30 de Abril:</u>

Esta aula foi dedicada à resolução de problemas. Pretendeu-se abranger as capacidades transversais: Resolução de problemas e Comunicação matemática. O objetivo específico, resolver problemas envolvendo equações de 1.º grau, foi atingido.

Na resolução dos problemas propostos, surgiram várias dúvidas. Logo no primeiro problema (Problema 3, pág. 178, ver Anexo7), pretendia-se que o aluno traduzisse que a soma de dois números naturais pares e consecutivos era 46. Quais eram esses números? O aluno que foi ao quadro escreveu o enunciado em linguagem matemática do seguinte modo: $x + (x + 1) = 46$. Resolvendo a equação, obteve $x = 22$, logo a resposta correta seria que os números eram 22 e 24. No entanto, lancei um desafio à turma: como garantir que um número seja par? Chegado à conclusão que o número seria da forma 2n (ou 2x), houve dificuldade em representar o número par consecutivo. Houve respostas como 4n, 2n + n, … Verifiquei muitas dúvidas em relação a esta questão.

Para facilitar a compreensão da representação destes dois números foi feita uma tabela, do seguinte modo:

Ordem	Nº par	Nº par consecutivo
1	2	4
2	4	6
3	6	8
4	8	10
5	10	12
6	12	14
…	…	…
n	**2n**	**2n + 2**

Recorrendo às sequências, foi mais fácil a compreensão que um número par é da forma 2n e que o seu consecutivo é da forma 2n+2.

Depois de terem compreendido esta regularidade, os alunos apenas tiveram que resolver a equação $2n + (2n+2) = 46$, obtendo $n=11$. Ou seja, os alunos compreendendo que o número par era 2n e o número par consecutivo era 2n+2, então, se $n=11$, os números pedidos eram o 22 e o 24.

No Problema 5 (pág. 178, ver Anexo 7) houve algumas dificuldades em representar o perímetro do retângulo. Foi necessário explicar aos alunos que teriam que fazer a soma do comprimento dos seus 4 lados e igualá-la a 40 para determinar o x. De novo pretendia-se que o aluno fizesse a tradução de linguagem corrente para linguagem matemática. Isto não foi tão óbvio para alguns alunos. De forma a ultrapassar este obstáculo, sugeri a um aluno ir ao quadro explicar aos colegas e resolver a equação pedida.

Enquanto os alunos resolviam no lugar verifiquei que, ao chegar ao resultado $x = -1,5$ o aluno afirmava que este problema não era possível pois não existem medidas negativas. No entanto, fiz notar que as medidas do retângulo eram $x+20$ e $x+3$, isto é, para o x encontrado, as medidas do retângulo seriam 18,5 e 1,5, tendo o problema solução.

O Problema 1 (pág. 178, ver Anexo 8) era novamente para traduzir a linguagem corrente para matemática. Este objetivo esteve presente em todos os problemas, atingido pela maior parte dos alunos. Reparei que alguns alunos não percebiam bem os problemas pois nem sequer tinham lido bem ou compreendido o enunciado. Antes de explicar o exercício, fiz o aluno ler o enunciado, isto é, perceber o que era dado, quais eram as hipóteses. No entanto, a resolução dos alunos foi diferente da minha prevista. Depois de analisar a minha planificação cheguei à conclusão que o que eu pedia estava fora do âmbito do programa do 7,º ano. Não previ esta situação e aceitei a resposta da aluna que foi ao quadro como válida.

A resolução do Problema 2 (pág. 178, ver Anexo 8) foi complicada para alguns alunos que não estavam a perceber bem o pretendido. Comecei por averiguar se os alunos sabiam o que é um triângulo equilátero. Ao resolver esta questão, em que os alunos averiguaram que $4x+3=2(2x+4)-5$ era uma proposição verdadeira para qualquer x. Foi introduzida aqui a noção de equação possível e indeterminada.

Na minha planificação estava prevista a resolução do Problema 4 (pág. 178, Anexo 8), que, não havendo tempo, ficou para trabalho de casa. Planificada estava também a resolução dos Problemas 8, 9 e 10 (pág. 178,Anexo 9) para trabalho de casa que não foram referidos nesta aula.

<u>03 de Maio:</u>

Nesta aula deu-se continuidade aos problemas envolvendo equações. Após ter corrigido o trabalho de casa (Problema 4, pág. 178, ver Anexo 8), no qual não me pareceu haver muitas dúvidas, introduzi a noção de equação possível e determinada partindo deste exemplo. No seguimento da classificação de equações, sugeri o Ex.7 c) (pág. 179), que pretende classificar a equação $-2x+3=-2x+3$, concluindo que a equação é possível e indeterminada. A partir do Exercício 8.4. do teste (realizado a 26 de Abril) foi introduzida a noção de equação impossível, isto é, uma equação que não tem solução.

Posto isto, foi proposta a resolução dos Problemas 8, 9 e 10 (pág. 179, do manual, ver Anexo 9). Em todos estes problemas era pretendido a tradução da linguagem corrente para linguagem matemática.

A aluna que foi ao quadro resolver o Problema 8 manifestou muitas dificuldades em entender o enunciado e em resolver a respetiva equação. Procedendo de modo coletivo na turma, este problema foi resolvido, a partir da definição de perímetro e aplicando os princípios de equivalência à equação obtida, e foi feita a respetiva verificação. Pretendeu-se dar significado à solução da equação e ao significado da resposta do problema.

Quanto ao Problema 9 tinha previsto duas resoluções. No entanto, os alunos resolveram o problema pela maneira mais simples. Facilmente encontraram as medidas dos lados que não eram dados no enunciado, e somando essas medidas com as dadas obtinham o perímetro. Era dado no enunciado que o perímetro era 85. Assim, os alunos apenas tiveram que resolver uma equação de 1º grau para determinar o valor de x que satisfazia essa condição. Porém, houve alunos que se limitaram a passar do quadro sem perceberem realmente o que se pretendia.

O Problema 10 não foi todo resolvido tendo ficado a sua conclusão para trabalho de casa. Novamente manifestou-se a dificuldade da tradução linguagem corrente para a linguagem matemática.

4.Opções Metodológicas

4.1.Participantes

O estudo foi realizado com alunos de uma turma do 7º ano de escolaridade da Escola EB 2,3 Fernando Pessoa. Foram escolhidos quatro alunos segundo os seguintes critérios: a) diferentes níveis de desempenho, recorrendo ao aproveitamento escolar em Matemática nos 1º e 2º períodos letivos; b) ser a primeira vez que frequentam o 7.º ano; c) capacidade de comunicação; d) predisposição para participar no estudo e e) possibilidade de reunir fora das aulas.

Foi pedida autorização aos Encarregados de Educação (ver Anexo 11) sendo estes informados dos objetivos do estudo a desenvolver. Além disso foi garantido o anonimato, atribuindo nomes fictícios aos alunos.

Andreia tem 12 anos e frequenta o 7º ano pela primeira vez. Vive só com a mãe em casa própria. Tanto o pai como a mãe estão empregados. Nos tempos livres a Andreia gosta de ler, ver televisão, utilizar o computador, praticar desporto e conviver com os amigos. Quanto a expetativas para futuro, Andreia pretende tirar um curso superior. Como profissão gostaria de ser cantora, atriz ou veterinária. As suas disciplinas favoritas são Espanhol, Educação Visual e Educação Tecnológica. A aluna é simpática mas um pouco conversadora. A nota do 1.º período à disciplina de Matemática foi 4, e no 2.º período foi também 4.

Beatriz tem 12 anos e frequenta o 7º ano pela primeira vez. Tanto o pai como a mãe estão desempregados. Nos tempos livres Beatriz gosta de ler, ver televisão, utilizar o computador, conviver com os irmãos e amigos e ir ao shopping. Quanto a expetativas, Beatriz pretende tirar um curso superior. As suas disciplinas favoritas são Educação Visual e Espanhol. Esta aluna é simpática, alegre e bastante participativa. A nota do 1.º período à disciplina de Matemática foi 4, e no 2.º período foi também 4.

Catarina tem 12 anos e frequenta o 7º ano pela primeira vez. O pai está empregado e mãe também está empregada. Nos tempos livres Catarina gosta de ler, ver televisão, utilizar o computador, conviver com os irmãos e amigos, ir ao cinema e ir ao shopping. Quanto a expectativas quer tirar um curso superior. As suas disciplinas preferidas são História e Ciências Naturais. Como profissão gostaria de ser educadora de infância. Catarina é muito tímida e pouco participativa. A nota do 1.º período à disciplina de Matemática foi 3, e no 2.º período foi também 3.

Daniel tem 12 anos e frequenta o 7º ano pela primeira vez. Vive só com a mãe. O pai e a mãe estão empregados. Nos tempos livres ler, ver televisão, utilizar o computador, ficar em casa, praticar desporto, conviver e passear com amigos, ir ao cinema e ir ao shopping. Daniel pretende tirar um curso superior. As suas disciplinas preferidas são Matemática e Ciências Naturais. O aluno gosta de acertar e participar, justificando, e gosta de ir ao quadro. A nota do 1.º período à disciplina de Matemática foi 5, e no 2.º período foi também 5.

4.2. Métodos de recolha de dados

São várias as técnicas e instrumentos de recolha de dados. Uma das mais usuais são os inquéritos. Os instrumentos mais frequentes na técnica de inquérito é o questionário e a entrevista. Por um lado o questionário permite a recolha de informação através do registo escrito, constituído por um conjunto de perguntas organizadas segundo uma determinada ordem. A entrevista permite a recolha de informação através da comunicação verbal, geralmente suportado por um guião de entrevista.

Para este trabalho optei pela entrevista uma vez que permite recolher informações, dados, utilizando, como referido, a comunicação verbal. Segundo Bogdan & Biklen (1994, in Vale, 2010) a entrevista, em investigação qualitativa, pode constituir a estratégia dominante para a recolha de dados ou pode ser utilizada em conjunto com a observação participante, análise de documentos e outras técnicas.

Para uma intervenção social eficaz, a observação cuidada e sistemática é considerada um meio indispensável para entender e interpretar a realidade.

Para Carmo & Ferreira (1998) a análise de documentos é um processo que envolve seleção, tratamento e interpretação da informação existente em documentos (escrito, áudio ou vídeo) com o objetivo de construir algum sentido.

4.2.1 Inquéritos (Entrevistas)

Quanto à recolha de dados, foram realizadas entrevistas (gravada em áudio, transcritas posteriormente) pois estas

- permitiram a captação imediata e corrente da informação desejada;
- permitiram correções, esclarecimentos e adaptações que a tornaram eficaz na obtenção das informações desejadas;
- foram transcritas;
- foram semi-diretivas (sem ordenação e formulação pré-fixadas);
- foi elaborado um guião (as perguntas foram elaboradas a partir das dificuldades observadas nas resoluções das equações no teste de avaliação).

Foram feitas quatro entrevistas, uma a cada um dos alunos acima referidos, dias 8, 9 e 10 de Maio, na Biblioteca da escola. A entrevista durou em média 35 minutos. Este método foi útil para verificar se os alunos entenderam e souberam aplicar os vários métodos de resolução de equações de 1º grau, justificando; para identificar os erros dos alunos, relacionados com os métodos de resolução de equações; para analisar as dificuldades de construção, aquisição, compreensão e utilização dos conceitos algébricos relativos às equações de 1º grau (porque acontecem, de onde vêm e o que faz com que surjam).

4.2.2. Observação

Foi comunicado aos alunos, no início do ano, que a observação das aulas seria integrada num projeto de investigação.

A observação em vídeo foi um dos recursos utilizados na observação de aulas, tendo sido previamente solicitada aos respetivos Encarregados de Educação a devida autorização.

Foram gravadas em vídeo quatro aulas: de dia 12, 17, 19 e 23 de Abril.

A observação das aulas permitiu:

- compreender o fenómeno no seu contexto natural;
- favorecer uma abordagem indutiva (reduzindo pré-conceções);
- identificar elementos a abordar nas entrevistas;
- registar notas de campo, factos e interpretações, opiniões e hipóteses.

4.2.3 Recolha documental

Na opinião de Yin (2002), o uso de documentos como forma de recolha de dados para o estudo de caso, é uma fonte segura, porque (1) permite a consulta repetida desses documentos; (2) apresenta rigor, por conter nomes, referências e pormenores fiéis de um facto e (3) revela abrangência, por poder integrar longos intervalos de tempo e grande diversidade de factos (Vale, 2010).

Neste trabalho, a análise documental baseia-se em diferentes tipos de documentos, tais como:

- **i.** Produções escritas dos alunos
  - **a)** Caderno diário
  - **b)** Teste de avaliação (realizado a 26 de Abril)
- **ii.** Pauta
- **iii.** Dossier DT
- **iv.** PCT

Estes diferentes documentos permitiram identificar algumas respostas às questões colocadas neste trabalho.

4.3. Análise de dados

Neste trabalho vão ser analisados os métodos de resolução de equações a partir das reproduções escritas dos quatro alunos em estudo, e da turma em geral.

Os erros vão ser categorizados segundo Hall(2002a, 2002b). Vou analisar os quatro casos em estudo e depois faço uma revisão geral da turma. Serão também considerados, na tipificação de Socas, erros da categoria C. Nesta categoria, consideramos os erros com origem em atitudes afetivas ou emocionais (exemplos: falta de concentração, excesso de confiança, esquecimento …).

5. Apresentação e análise de dados

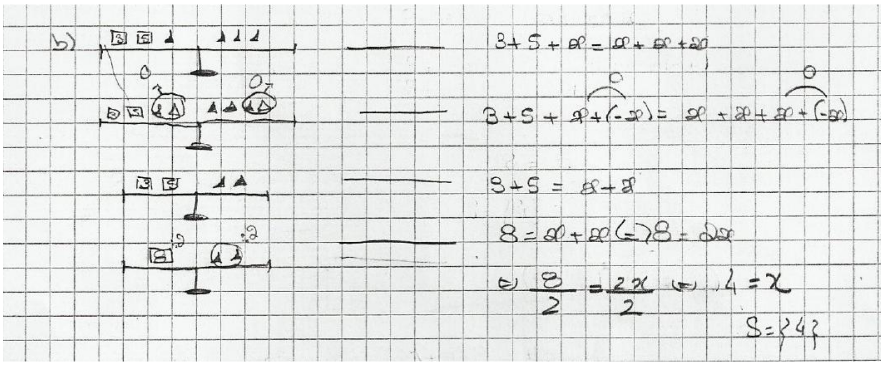
5.1. Métodos usados na resolução de equações de 1º grau.

5.1.1. Andreia

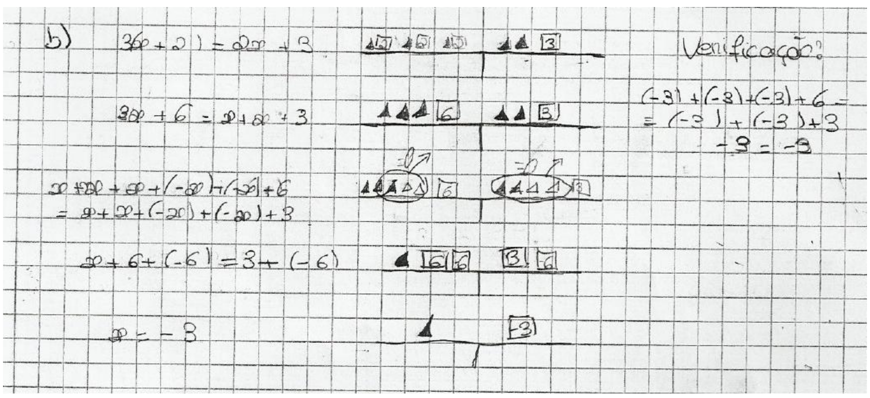
Métodos usados nas aulas

Nas aulas, Andreia, na resolução de equações, recorreu aos 1.º e 2.º Princípios de Equivalência e fez a redução de termos semelhantes. Em todos os exercícios as equações foram representadas tanto pictórica como algebricamente. A aluna nem sempre fez a verificação.

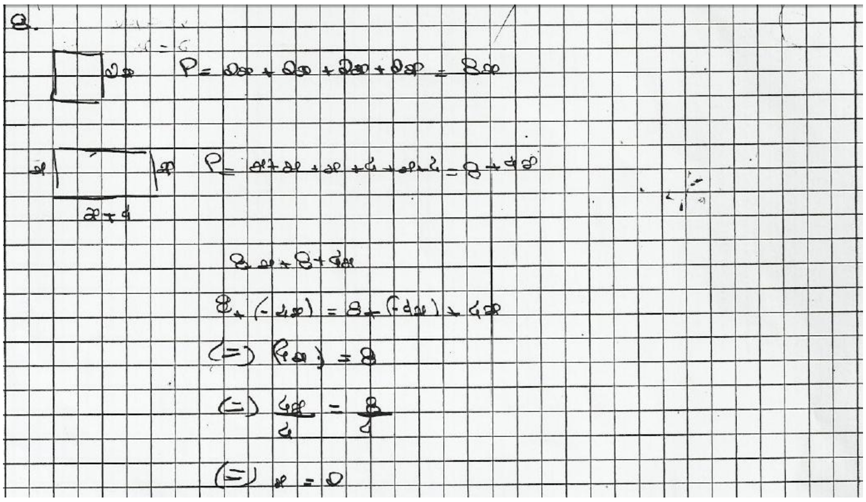
Um exemplo é o exercício 2.b) (pág. 172, do manual):



Também na resolução de equações com parênteses a aluna aplica os Princípios de Equivalência, e ainda recorre à representação pictórica. A aluna faz a verificação:

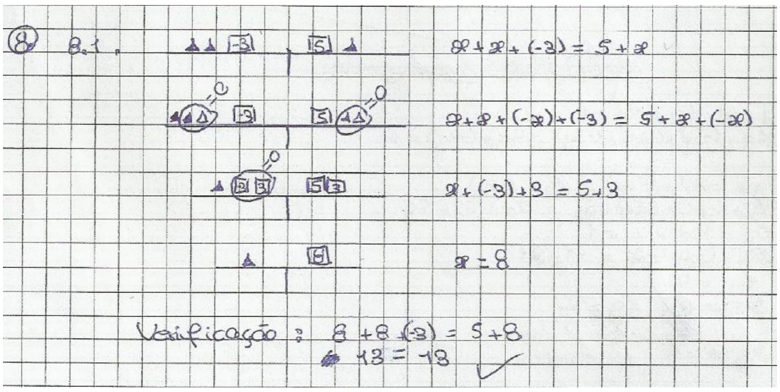


Passando aos problemas, a aluna também os resolve aplicando os 1.º e 2.º Princípios de Equivalência, sem recurso à representação pictórica. Por exemplo, no problema (Ex. 8, pág. 179, do manual): "Considera um quadrado de lado 2x e um retângulo de dimensões x e x+4. Para que valor de x as duas figuras têm a mesma medida de perímetro?", a aluna resolveu a equação que traduzia o problema algebricamente (sem recurso ao pictórico) aplicando os 1.º e 2.º Princípios de Equivalência. A aluna não faz a verificação.



.Métodos usados no teste

Esta aluna aplicou os Princípios de Equivalência na resolução das equações enunciadas. Na primeira equação (2x-3=5+x) aplicou o 1.º Princípio, reduziu termos semelhantes, e fez a verificação, como se pode ver na resolução que a seguir apresento:

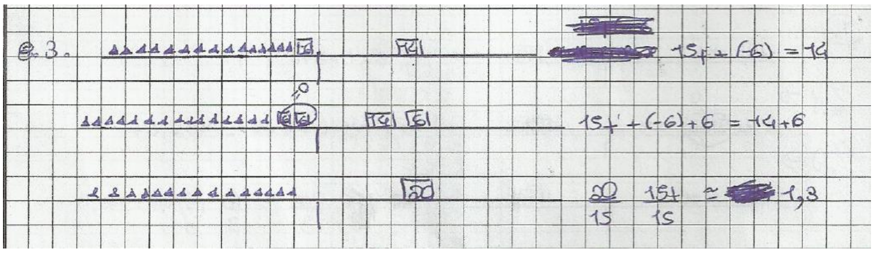


A aluna resolveu corretamente a equação e explica o seu raciocínio na entrevista. Verifica-se que a aluna sabe aplicar o 1.º princípio de Equivalência:

A: Fiz x + x + (-3) = x + 5 que é o que estava representado.
Depois acrescentei o simétrico de x: -x.
Fiz: x + x + (-x) + (-3) = 5 + x + (-x)
Foi-me dar: x + (-3) +3 = 5 + 3
Acrescentei o simétrico de -3: 3 e foi dar x = 8.
Depois verifiquei: substituí x por 8 e deu-me igualdade.

A aluna não resolveu a equação da questão 8.2.

Na terceira equação (15t-6=14) a aluna aplica os dois Princípios de Equivalência e reduz os termos semelhantes:



Na justificação a aluna repara que se esqueceu de por o sinal de igual:

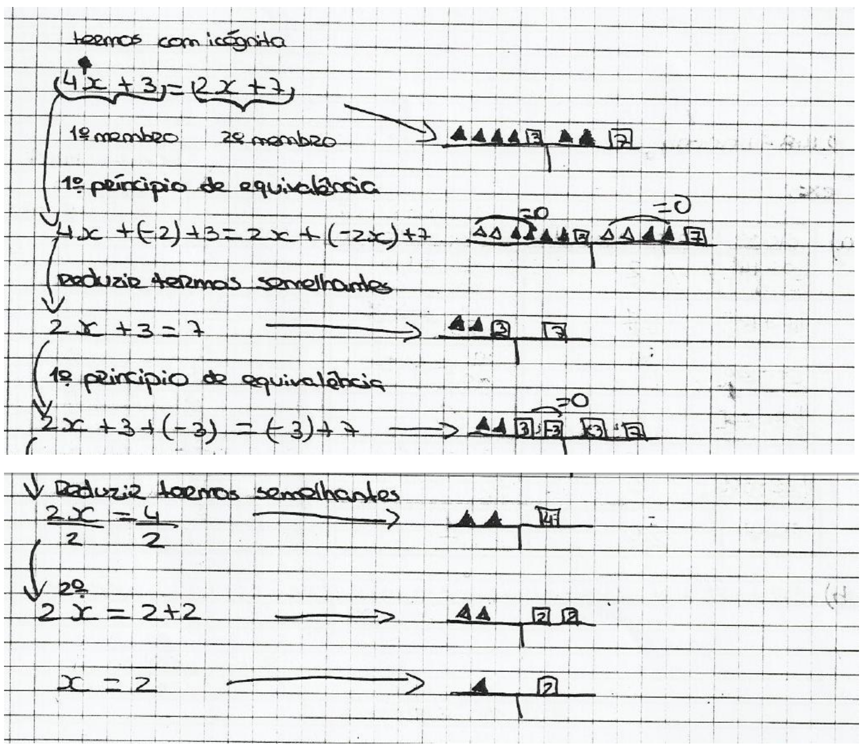
A: Do enunciado: 15t + (-6) = 14
Acrescentei o simétrico: 6
15t + (-6) + 6 = 14 + 6
Fiz 20/15 e 15t/15 ≈ 1,3
↓
Esqueci-me de por o igual.

5.1.2. Beatriz.

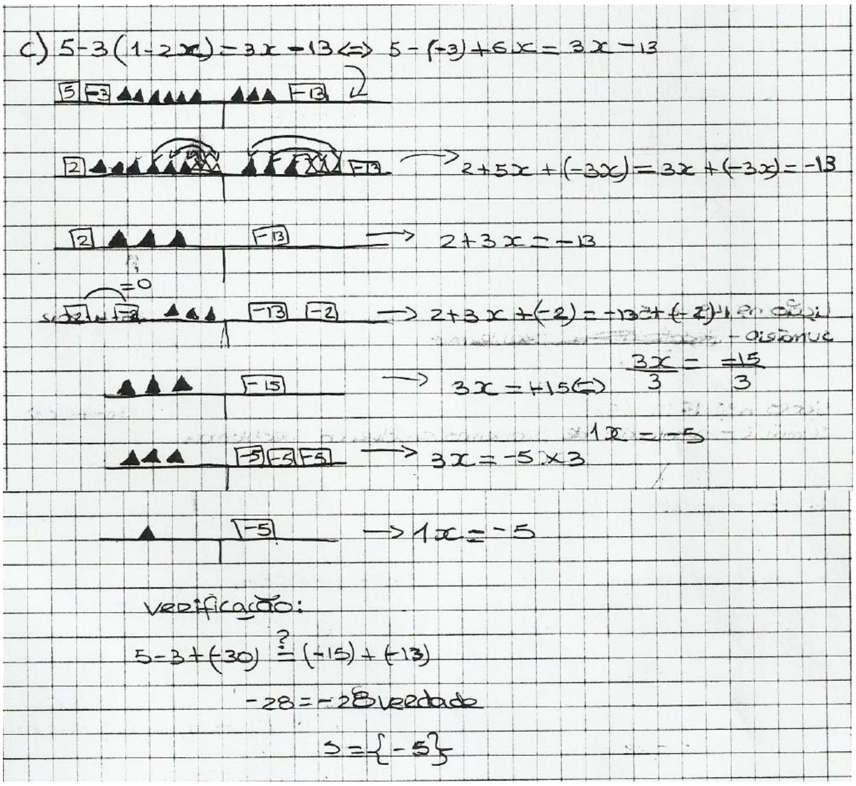
Métodos usados nas aulas

Esta aluna ao resolver equações recorreu à representação pictórica paralelamente à representação algébrica. A representação pictórica acompanhou-a sempre na resolução de equações e de exercícios.

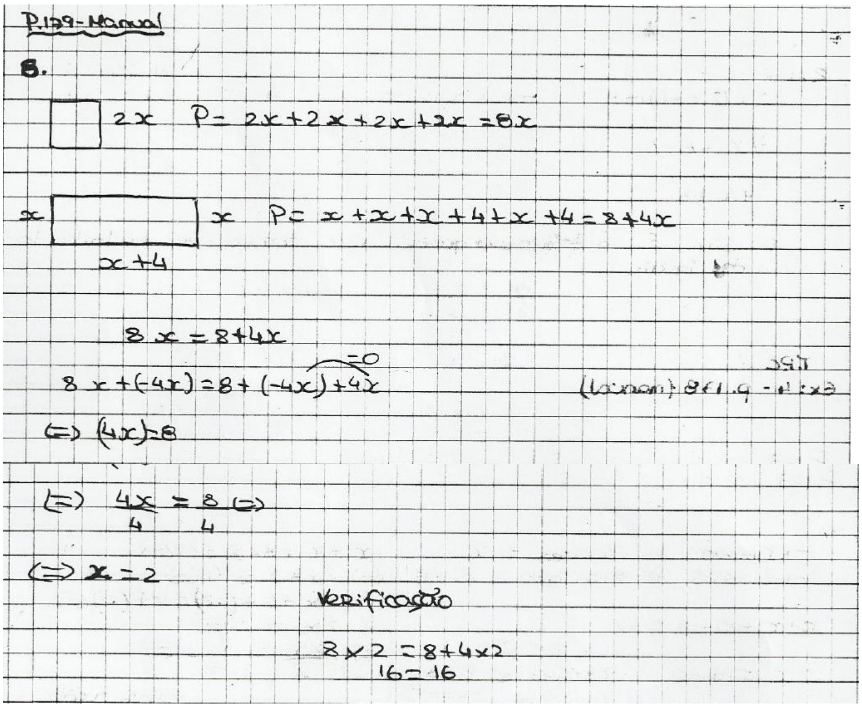
Nas resoluções das equações a aluna aplicou, a maior parte das vezes, o 1.º Princípio de Equivalência, e, quando necessário, aplicou também o 2.º Princípio de Equivalência. A redução dos termos semelhantes também está presente nas resoluções de equações da aluna:



Mesmo quando foram introduzidas as equações com parênteses, foi também usada a representação pictórica. Utiliza novamente os Princípios de Equivalência e a redução de termos semelhantes. A aluna faz também a verificação da solução:

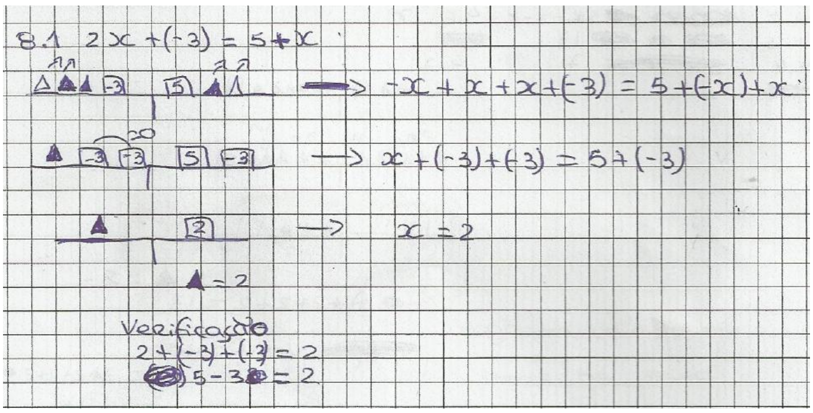


No entanto, quando se chegou aos problemas, a aluna abandonou a representação pictórica, resolvendo as equações algebricamente. Os Princípios de Equivalência e a redução de termos semelhantes foram novamente aplicados pela aluna na resolução de equações para resolver problemas. No seguinte problema (Ex. 8, pág. 179, do manual): "Considera um quadrado de lado 2x e um retângulo de dimensões x e x+4. Para que valor de x as duas figuras têm a mesma medida de perímetro?", a aluna resolveu a equação que traduzia o problema algebricamente (sem recurso ao pictórico) aplicando os 1.º e 2.º Princípios de Equivalência. No final fez a verificação:



Métodos usados no teste

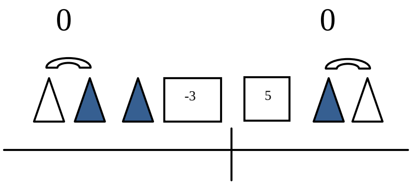
Relativamente à equação 8.1 do teste, representada pictoricamente, 2x – 3 =5 + x. A aluna aplicou o 1.º Princípio de Equivalência, e fez a verificação:



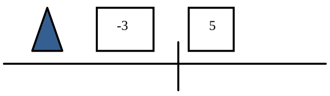
Em entrevista foi pedido à aluna para explicar o seu procedimento. Verifiquei que a aluna sabe aplicar e explicar os Princípios de Equivalência, ou seja, a aluna aplicou e conseguiu explicar que deveria somar o simétrico do termo (independente ou incógnita) para os poder anular. Isto é, sabe aplicar o 1.º Princípio de

Equivalência (Se somarmos ou subtrairmos a mesma quantidade a ambos os membros de uma equação, obtemos uma equação equivalente). A aluna explica:

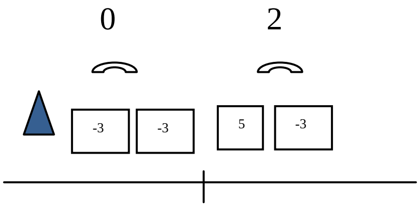
B: Comecei por adicionar o simétrico de cada lado.
P: Estás a falar de que simétrico?
B: Da incógnita, do triângulo azul. E depois vi que estes aqui, dava zero.



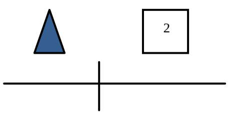
B: Ficávamos de um lado com um triângulo azul e o -3, e do outro lado 5:



B: Depois adicionei o simétrico de 3.
Agora deveria ter somado 3 e não -3 [Deu conta do erro] e do outro lado a mesma coisa:

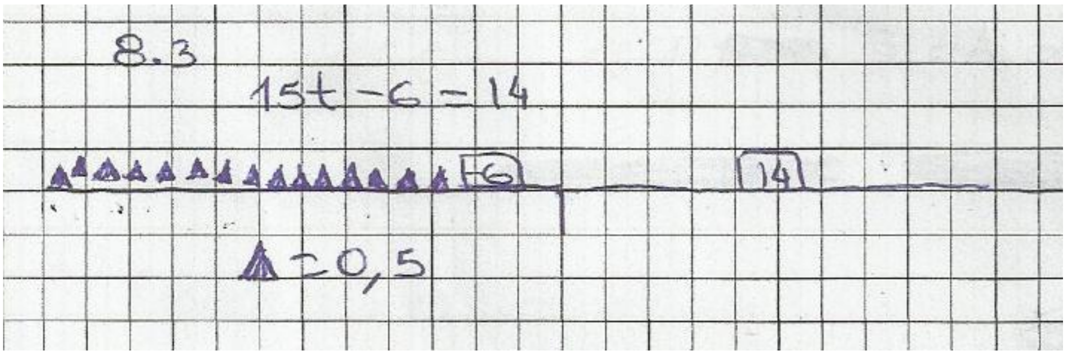


B: Fica



B: A incógnita só poderia ser 2.
P: Fizeste a verificação?
B: Sim.
P: O que deu?
B: Meti 2+(-3)+(-3) = 2
5-3 = 2

A equação da questão 8.3 é dada na forma algébrica: 15t – 6 = 14. A aluna teve dificuldades e aplicou método de substituição por tentativa e erro chegando a uma conclusão errada:



A aluna explicou:

> B: Tive algumas dificuldades. Eram 15 triângulos azuis (incógnitas).
> B: Tentei fazer 0,5x15-6 para ver se dava 14.
> P: Chegaste à conclusão?
> B: Acho que sim, que deu 14.

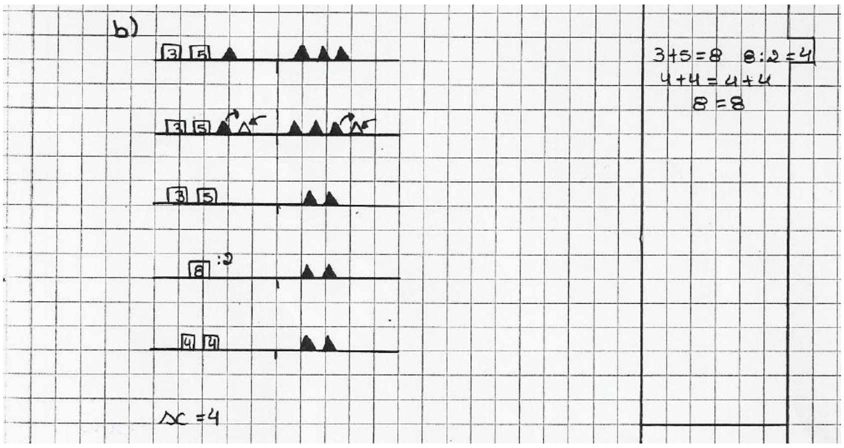
Para que o resultado de 0,5x15-6 ser 14, a aluna terá pensado que 0,5X15 = 20, ao qual, subtraindo 6, dava 14. A aluna não fez a verificação corretamente, pois substituindo t por 0,5 não se obtém uma proposição verdadeira.

A aluna não respondeu à questão 8.4.

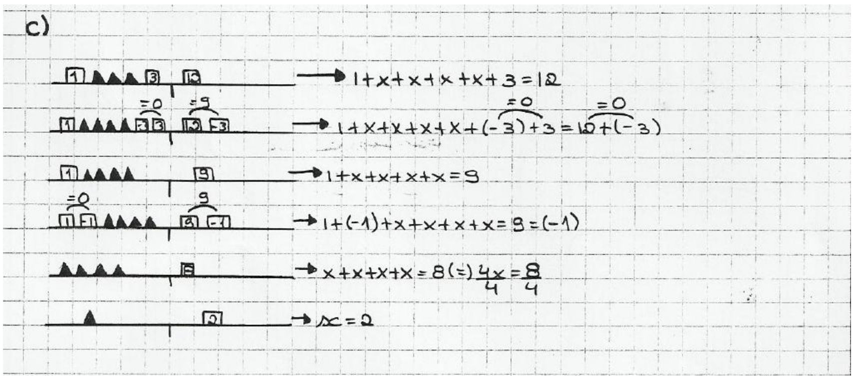
5.1.3. Catarina.

Métodos usados nas aulas

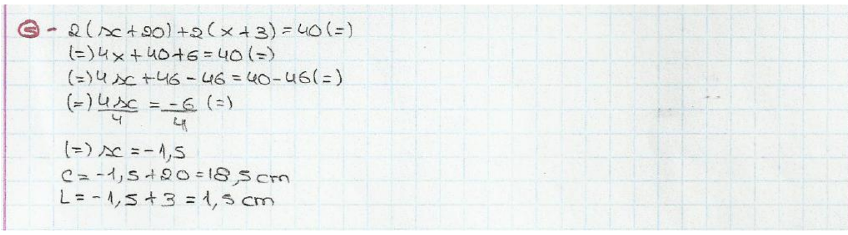
Nas aulas, esta aluna não resolve todos os exercícios propostos, e, por vezes, apenas resolve pictoricamente , como por exemplo:



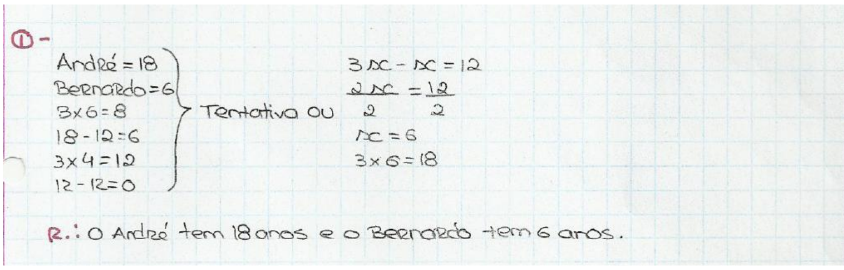
A aluna aplica os Princípios de Equivalência e reduz os termos semelhantes quando faz também, ou apenas, a representação algébrica:



Na resolução de problemas, a aluna resolve equações com parênteses. Também nestas equações a aluna aplica os Princípios de Equivalência e reduz os termos semelhantes. O Problema 5 (pág. 178, do manual – ver Anexo 7) enuncia-se do seguinte modo: "As dimensões do retângulo da figura estão expressas em centímetros (e são x+20 e x+3). Sabendo que o perímetro é 40 cm, determina as suas dimensões". A aluna traduz corretamente a linguagem corrente para a linguagem matemática, resolve corretamente a equação com parênteses, aplica os princípios e conclui dando resposta ao problema:


5 - $2(x+20)+2(x+3)=40$ (=)
(=) $4x+40+6=40$ (=)
(=) $4x+46-46=40-46$ (=)
(=) $\frac{4x}{4}=\frac{-6}{4}$ (=)
(=) $x=-1,5$
$C=-1,5+20=18,5$ cm
$L=-1,5+3=1,5$ cm

Outro método adotado pela aluna, é o de tentativa-erro. O Problema 1 (pág. 178, do manual) é exemplo disso. O Problema pede para determinar a idade do André e do Bernardo, sabendo que a idade do André é o triplo da idade do Bernardo e o Bernardo tem menos 12 anos do que o André, ao que a aluna respondeu:


1 -
André = 18
Bernardo = 6
$3\times6=8$
$18-12=6$
$3\times4=12$
$12-12=0$
Tentativa ou
$3x-x=12$
$\frac{2x}{2}=\frac{12}{2}$
$x=6$
$3\times6=18$
R.: O André tem 18 anos e o Bernardo tem 6 anos.

Paralelamente, a aluna resolve a equação algebricamente.

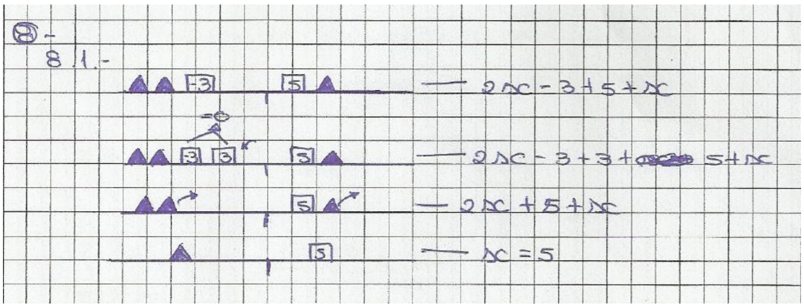
Métodos usados no teste

As resoluções produzidas pela Catarina das equações consideradas no teste para este estudo não têm qualquer sentido. Verifica-se que a aluna não percebeu o que é uma equação, ou o que é resolver uma equação. Não tem noção do que é uma igualdade, nem sabe aplicar os Princípios de Equivalência.

Pode-se concluir que a aluna não faz um trabalho autónomo na sala de aula e que se limita a copiar o que está no quadro.

É exemplo disto a seguinte resolução:

À questão 8.1, onde está representada pictoricamente a equação 2x-3=5+x, a aluna respondeu:

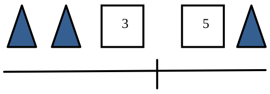


Neste primeiro exemplo foi pedido à aluna que explicasse o seu raciocínio.

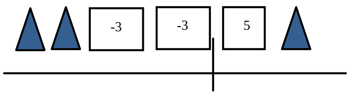
A aluna explica como fez:

C: Copiei como estava no teste. Fiz pictórica e algebricamente:

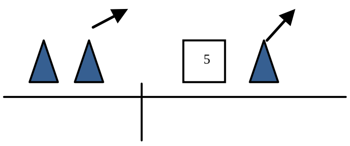
Pictoricamente   algebricamente deu 2x-3+5+x



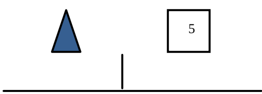
Então depois acrescentei o simétrico de -3 que é 3, logo o resultado entre -3 e 3 dá zero:



P: E algebricamente?
C: Fica 2x - 3 + 3 + 5 + x.
P: A seguir o que fizeste?
C: Como -3 e 3 dá zero, não voltei a escrever na próxima balança. Depois tirei um pin de cada um dos lados:



C: Ficou na representação algébrica 2x+5+x. E depois o resultado foi x = 5.



P: Porquê?
C: Como temos um pin e um 5, equivalem um ao outro.
P: Achas que a solução é 5?

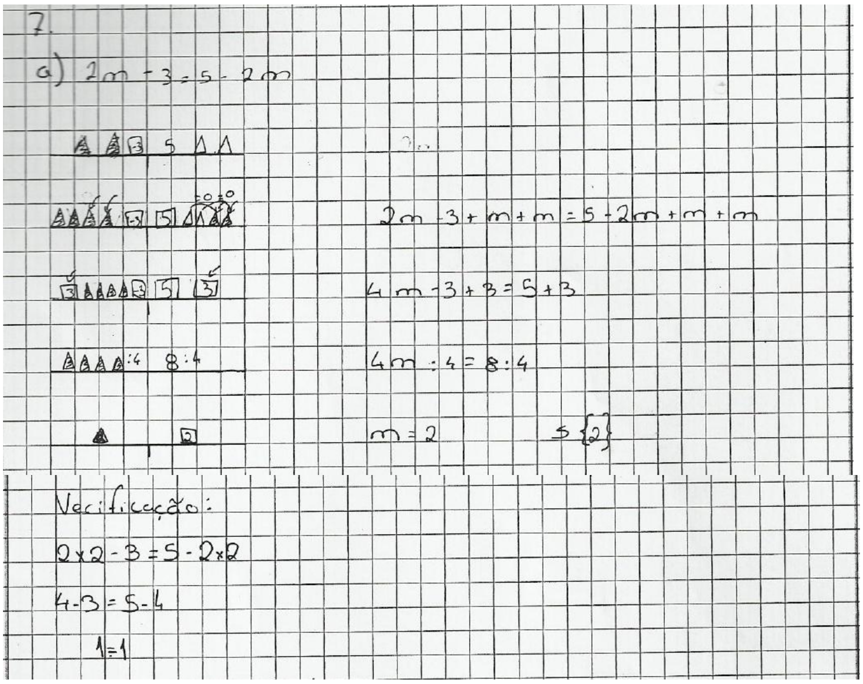
C: Sim.

A aluna percebe que tem que somar o simétrico ao termo independente, para os poder anular e retirar da balança. A aluna soma -3, simétrico de 3, mas apenas o fez num dos pratos da balança. Além disso a aluna deveria somar o simétrico de x a ambos os pratos, mas no entanto a aluna "tirou" um pin de cada lado sem passar pelo passo de somar o simétrico do pin azul, sem evocar o 1º Princípio de Equivalência. Como será analisado na parte dos erros, nesta resolução a aluna comete o erro de ausência de estrutura.

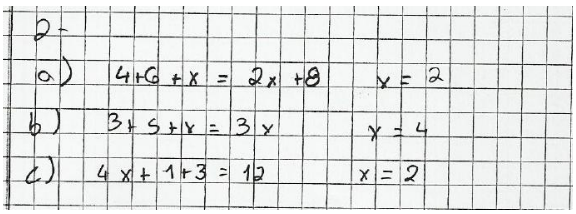
5.1.4. Daniel

Métodos usados nas aulas

O aluno resolve as equações, tanto pictórica como algebricamente, aplicando os Princípios de Equivalência e reduzindo os termos semelhantes. Estes métodos de resolução encontram-se, tanto nos exercícios, como na resolução de problemas. O aluno faz a verificação da solução:

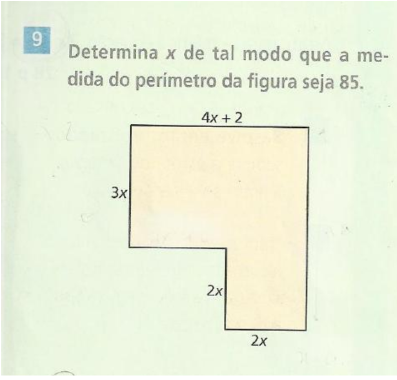


No caderno verifiquei também a resolução de equações sem apresentação de nenhuma estratégia. O aluno apenas indica a solução:

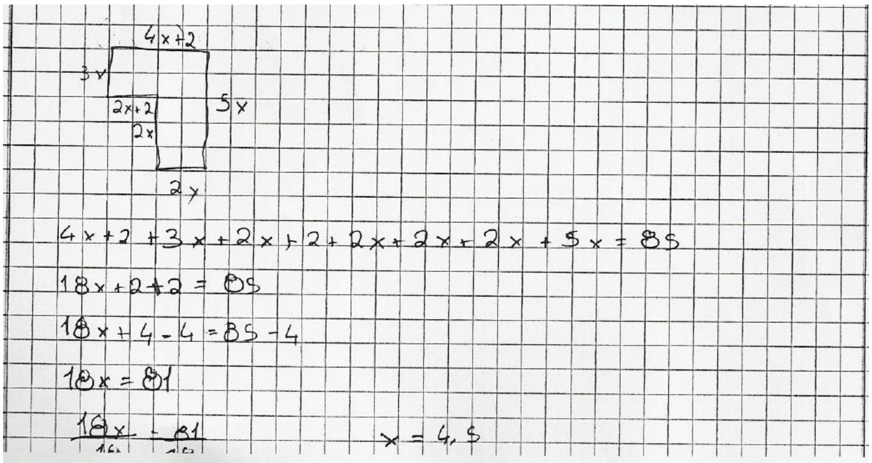


Também na resolução de problemas o aluno aplica os dois Princípios de Equivalência.

O seguinte problema

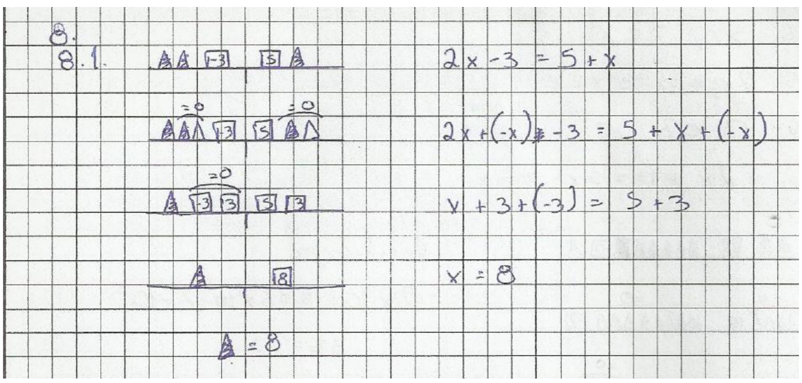


é resolvido pelo aluno aplicando os 1.º e 2.º Princípios de Equivalência:



.Métodos usados no teste

Nas questões em análise do texto, o Daniel aplicou os Princípios de Equivalência, e reduziu os termos semelhantes. Em particular, a primeira equação, 2x + 3 = 5 + x, foi resolvida pelo Daniel aplicando o 1.º Princípio de Equivalência:

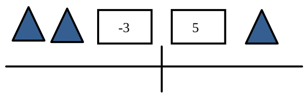


Foi pedido ao aluno que explicasse o seu raciocínio. Verificou-se que o aluno soube aplicar e explicar o 1.º Princípio de Equivalência.

P: Explica lá o que fizeste!

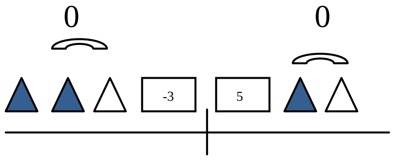
D: Pedia para fazer pictoricamente e algebricamente e fi-lo assim:

Fiz a balança: e algebricamente ao lado:

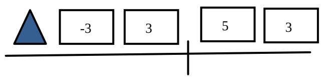


$2x - 3 = 5 + x$

P: E o que fizeste?
D: Para poder anular o x, somei o seu simétrico:

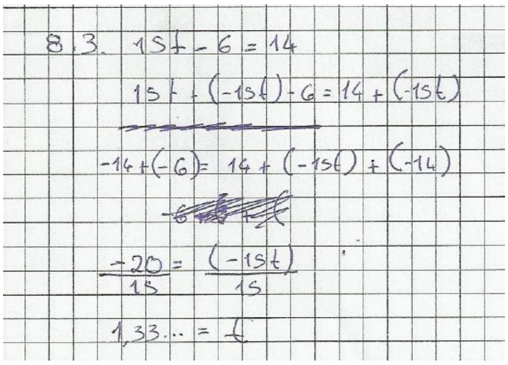


P: A seguir?
D: Algebricamente, ao lado: $2x + (-x) - 3 = 5 + x + (-x)$.
P: E depois?
D: Adicionei o simétrico ao -3, e fiquei com



D: Fiquei com x no 1º membro e somei 5 e 3 no 2º membro e deu-me x=8
P: E não fizeste a verificação?
D: Não! A Professora não pediu a verificação!
P: Tens de fazer sempre!
P: E se te pedisse agora? Como farias?
D: Substituía a incógnita pelo valor de x, pelo seu valor.
P: Neste caso como fica?
D: 8+8-3=5+8 (?)
13 = 13 V

Na terceira equação, 15t-6=14, o aluno aplica os dois Princípios de Equivalência:



Verifica-se novamente que o aluno sabe aplicar os Princípios de Equivalência, confirmando o anteriormente afirmado. O aluno justifica os seus passos do seguinte modo:

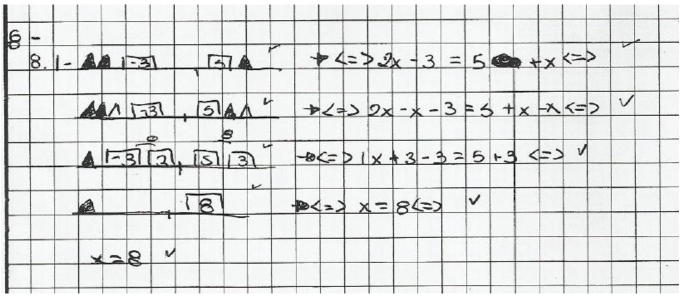
D: Não fiz pictoricamente.
P: A professora disse que não era preciso, escreveu no quadro que era só algébrica. O que fizeste?
D: Adicionei o simétrico a 15t, ou seja, -15t, e anulei.
P: Ficou?
D: 15t + (-15t) – 6 = 14 + (-15t)
P: E agora?
D: Depois anulei o 14, somando -14 e anulei. Depois somei -14 + (-6), deu-me -20, e no 2º membro, tinha -15t. Como era o número de vezes que a incógnita aparecia representada, dividi por 15, divido ambos os membros por 15 e deu-me um número infinito: 1,33…= t.

O aluno não respondeu à questão 8.4.

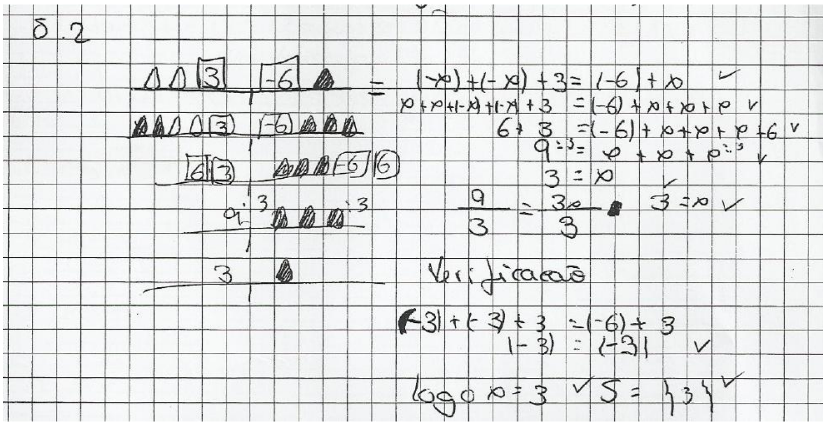
5.1.5. Turma

A maior parte dos alunos, para resolver equações de 1.º grau, aplicam os 1.º e 2.º Princípios de Equivalência. Estes métodos verificaram-se em todos os testes, e os alunos, com ou sem erros, resolveram as equações dadas. Verificou-se também que, em grande parte, os alunos reduziram corretamente os termos semelhantes.

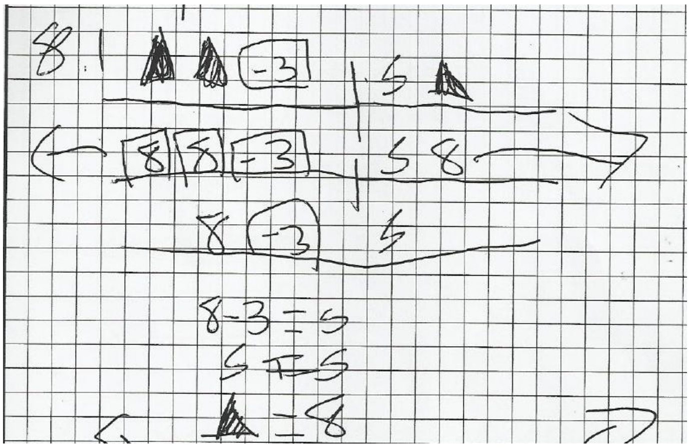
As equações que estavam representadas pictoricamente no enunciado foram resolvidas tanto pictórica como algebricamente. Regra geral, foram aplicados os Princípios de Equivalência, como por exemplo, na questão 8.1. (2x-3=5+x), os alunos aplicaram o 1.º Princípio de Equivalência:



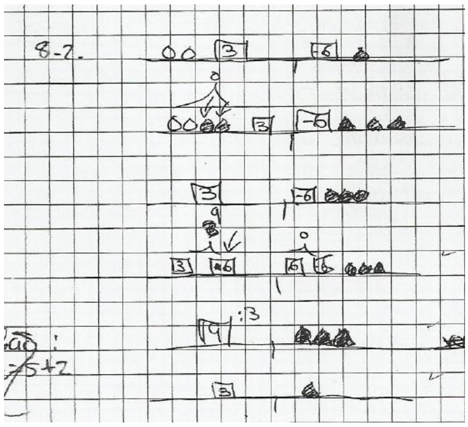
Na questão 8.2. (-2x+3=-6+x), os alunos aplicaram o 1.º e 2.º Princípios de Equivalência, como ilustro na resolução seguinte:



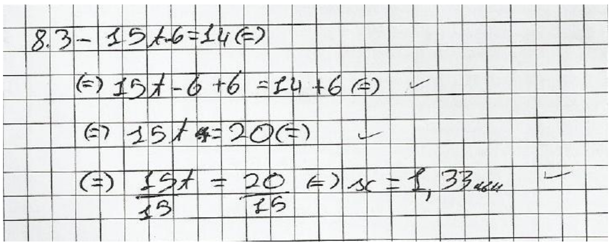
Outro método usado pelos alunos para resolver equações é o método da substituição. De assinalar o caso em que o aluno resolve a equação 8.1. pelo método da substituição, no entanto, pictoricamente, o aluno substitui o pin pelo valor da solução da equação:



A representação pictórica é também usada para resolver equações. Por exemplo, na questão 8.2. uma aluna resolveu pictoricamente:



Nas questões 8.3. e 8.4. em que apenas é dada a equação algébrica, os alunos abandonaram a representação pictórica. Nestas duas questões, o método mais utilizado pelos alunos foi a aplicação dos Princípios de Equivalência e a redução dos termos semelhantes. Apresento, de seguida, dois exemplos de resoluções corretas, respetivamente para as questões 8.3 e 8.4:

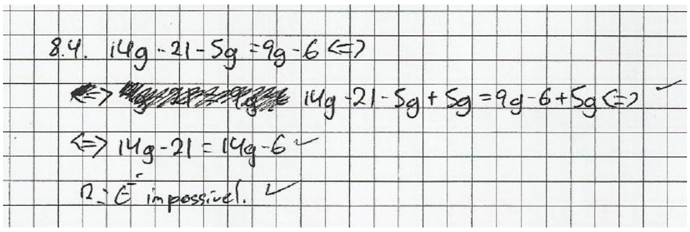


8.3- $15t-6=14 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 15t-6+6=14+6 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 15t=20 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{15t}{15}=\frac{20}{15} \Leftrightarrow x=1,33...$



8.4. $14g-21-5g=9g-6 \Leftrightarrow$

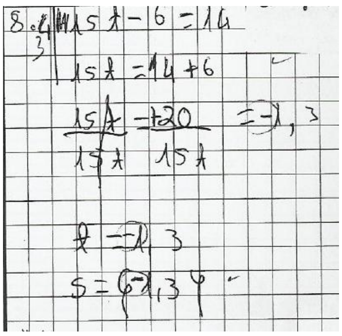
$\Leftrightarrow 14g-21-5g+5g=9g-6+5g \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 14g-21=14g-6$

R: É impossível.

Um método adotado por outro aluno foi o método da transposição: numa equação, podemos mudar um termo de um membro para o outro se lhe trocarmos o sinal. O aluno que aplicou este método (em ambas as equações 8.3.e 8.4.) acabou por enganar-se na resolução da equação. Aparentemente, o aluno resolveu a equação mecanicamente sem dar significado à operação envolvida, sem a compreensão do que são equações equivalentes, o que o levou a cometer erros. As suas resoluções são as que se seguem:

Questão 8.3. 15t-6=14



8.3 $15t-6=14$

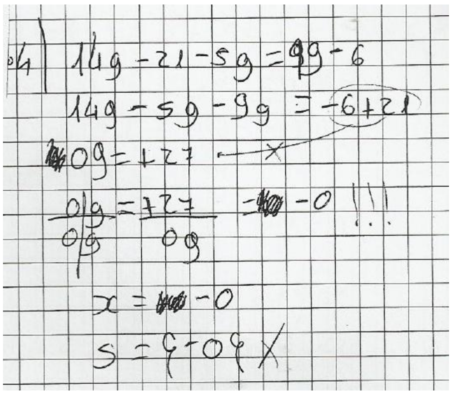
$15t=14+6$

$\frac{15t}{15t}=\frac{+20}{15t}=-1,3$

$t=-1,3$

$S=\{-1,3\}$

Questão 8.4. 14g-21-5g=9g-6



Síntese

Em síntese, apresento os métodos aplicados na resolução das equações 8.1, 8.2, 8.3 e 8.4 do teste de avaliação pelos alunos da turma (ver Anexo 10)

8.1 Esta equação foi corretamente resolvida por metade dos alunos (50%) aplicando o 1º Princípio de Equivalência, houve porém alunos que cometeram erros nas contas. 30,7% dos alunos não responderam, os que erraram foram 11,5% e dois alunos (7,7%) aplicaram o método da substituição, um deles pictoricamente.

8.2 Esta equação foi corretamente resolvida por 9 alunos (34,6%) aplicando os 1º e 2º Princípios de Equivalência. Houve alunos que erraram nas contas, outro fez apenas pictoricamente e um terceiro aluno que não explica; 19,2% dos alunos erraram a resposta e 46,1% dos alunos não responderam.

8.3 Oito alunos (30,7%) responderam corretamente à questão aplicando os 1º e 2º Princípios de Equivalência. Um aluno (3,8%) aplicou a regra da transposição e o 2º Princípio de Equivalência. Mais de metade dos alunos (53,8%) não resolveu a equação e 11,5% dos alunos erraram a resposta.

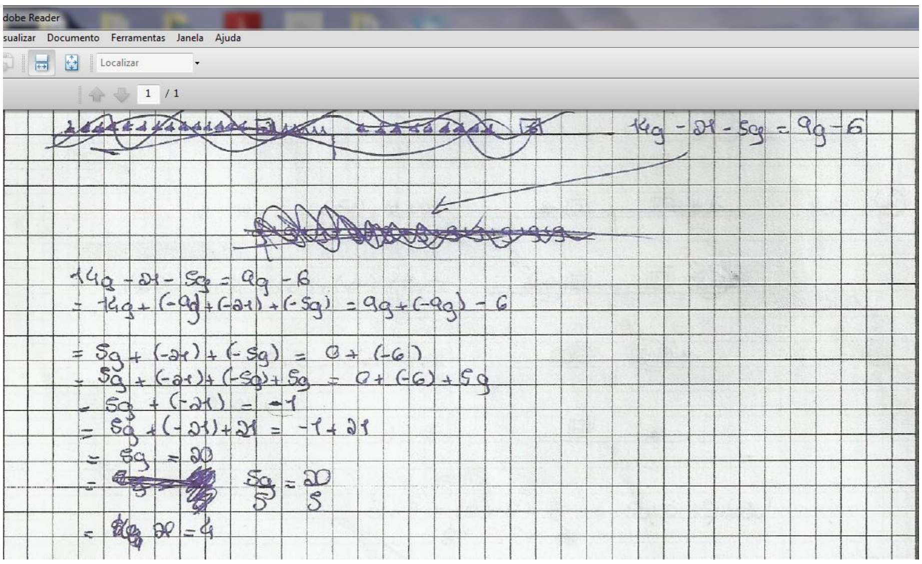
8.4 Esta equação foi resolvida aplicando o 1º Princípio de Equivalência por 30,7% dos alunos, no entanto cinco cometeram erros de contas. Houve também um aluno que resolveu pelo método da transposição (3,8%). Mais de metade dos alunos (57,6%) não responderam. Um aluno errou na resolução (3.8%), e um aluno (3,8%) aplicou o 1º e 2º Princípios de Equivalência, no entanto com solução errada.

A maior parte dos alunos ao resolver equações aplicam os 1.º e 2.º Princípios de Equivalência e, na maior parte dos casos, reduzindo os termos semelhantes corretamente. Houve alunos que utilizaram o método de substituição, tendo chegado à solução correta. O aluno que optou por aplicar o método da transposição acabou por se enganar na resolução das equações onde aplicou este método. Ou seja o aluno aplicou o método mecanicamente, sem perceber o seu significado.

5.2. Análise dos erros

Andreia

A Andreia cometeu um erro por eliminação (*deletion*) na última questão do teste, quando soma o termo independente -6 com o termo com incógnita 5g obtendo -1.



Em entrevista a aluna explica como procedeu:

A: Do enunciado: 14g – 21 – 5g = 9g – 6

Acrescentei o simétrico de 9g que é -9g:

$$14g + (-9g) + (-21) + (-5g) = \underbrace{9g + (-9g)}_{0} - 6$$

Então ficou

5g + (-21) + (-5g) = 0 + (-6)

Depois acrescentei o simétrico de -5g que é 5g, e fiz:
5g + (-21) + (-5g) + 5g = 0 + (-6) + 5g
então foi-me dar
5g + (-21) = -1

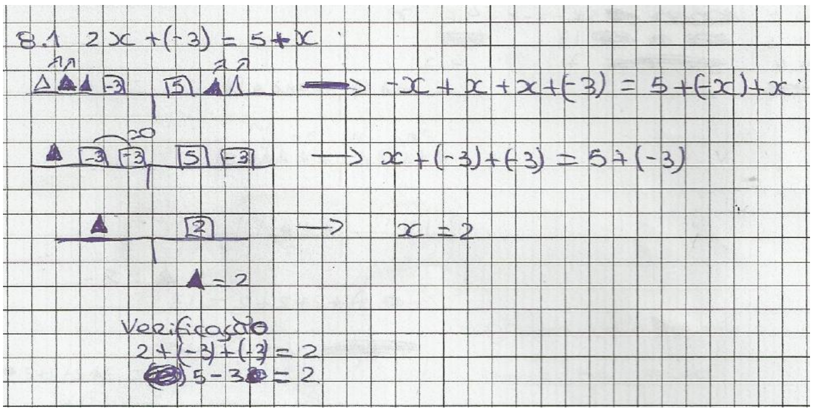
[Foi no passo anterior que a aluna comete o erro por eliminação (*deletion*), fazendo (-6)+5g = -1]

Então acrescentei simétrico de -21 e fiz:
5g + (-21) + 21 = -1 + 21
foi dar
5g = 20
Dividi por 5g por 5 e 20/5 para saber quanto era o x. Concluí x = 4.

A aluna percebe que tem que aplicar os Princípios de Equivalência e aplica-os corretamente, somando o simétrico e dividindo ambos os membros pela mesma quantidade (diferente de zero). No entanto, a aluna comete um erro por eliminação (*deletion*). Mesmo em entrevista a aluna comete o mesmo erro, não percebendo que não se podem reduzir termos que não são semelhantes.

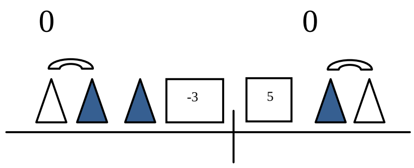
Beatriz

Na questão 8.1 onde se pedia para resolver a equação, que está representada pictoricamente, 2x-3=5+x, a aluna comete um erro, somando não o inverso, mas o próprio número a ambos os membros. Segundo Socas este seria um erro de concentração, incluído na categoria C da sua tipificação.

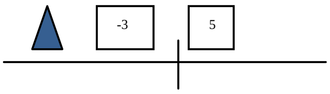


Em entrevista a aluna dá conta do erro cometido. Explica o seu procedimento:

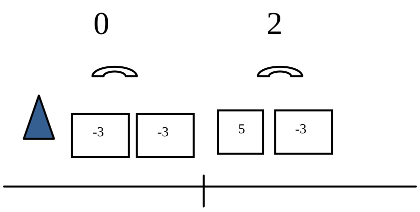
B: Comecei por adicionar o simétrico de cada lado.
P: Estás a falar de que simétrico?
B: Da incógnita, do triângulo azul. E depois vi que estes aqui, dava zero.



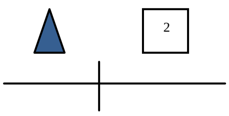
B: Ficávamos de um lado com um triângulo azul e o -3, e do outro lado 5:



B: Depois adicionei o simétrico de 3.
Agora deveria ter somado 3 e não -3 [Deu conta do erro] e do outro lado a mesma coisa:



B: Fica

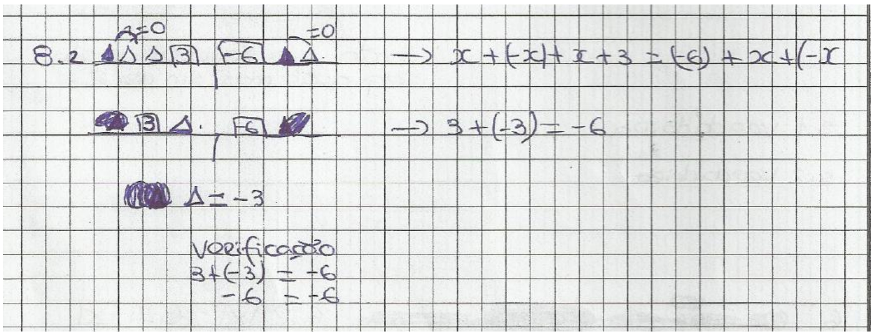


B: A incógnita só poderia ser 2.
P: Fizeste a verificação?
B: Sim.
P: O que deu?
B: Meti 2+(-3)+(-3) = 2
5-3 = 2

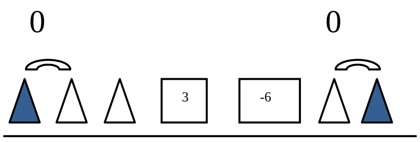
A aluna percebe que cometeu um erro. No entanto, ao fazer a verificação da solução encontrada conclui que se obtém um proposição verdadeira, tendo-se enganado no processo de verificação. A aluna soma 2+(-3)+(-3) e obtém 5-3 = 2.

Este erro poderá ter surgido por falta de concentração ou distração. Percebe-se nesta resolução que a aluna sabe aplicar o 1º Princípio de Equivalência corretamente.

Na questão 8.2 é dada, pictoricamente, a equação -2x + 3 = -6 + x. Nesta equação a aluna comete um erro de redistribuição (*redistribution*). A aluna soma x no primeiro membro e soma –x no segundo membro:



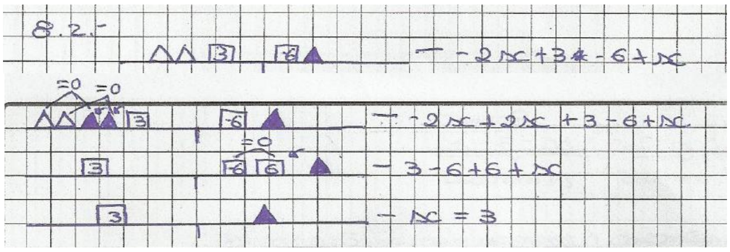
B: Adicionei o simétrico do triângulo azul que é o triângulo branco



B: Fiz mal! Aqui [lado esquerdo] acrescentei um triângulo azul e aqui [lado direito] acrescentei um triângulo branco.

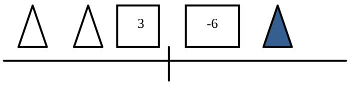
Catarina

Em todas as questões que envolviam resolução de equações a aluna cometeu sempre o erro de ausência de estrutura (*absence of structure*). É exemplo disso a resolução:

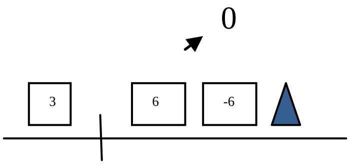


A aluna explica como procedeu:

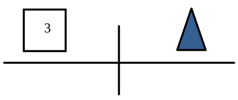
C: Fiz como no enunciado a representação pictórica:



C: Na algébrica ficou -2x + 3 – 6 + x.
Depois acrescentei dois simétricos do pin.
P: Qual pin?
C: Dos que estão pintados, acho que são os positivos. Então o resultado foi zero.
P: A primeira representação é o enunciado, e a seguir?
C: Acrescentei dois simétricos.
P: Os simétricos dos pins bancos ou azuis?
C: Os azuis são os que já cá estavam no enunciado. Acrescentei os simétricos dos azuis para anulá-los. Depois… posso passar para a algébrica?
P: Sim.
C: Ficou -2x + 2x + 3 – 6 + x
P: Sim?
C: Como tínhamos anulado os pins azuis, ficou só 3:



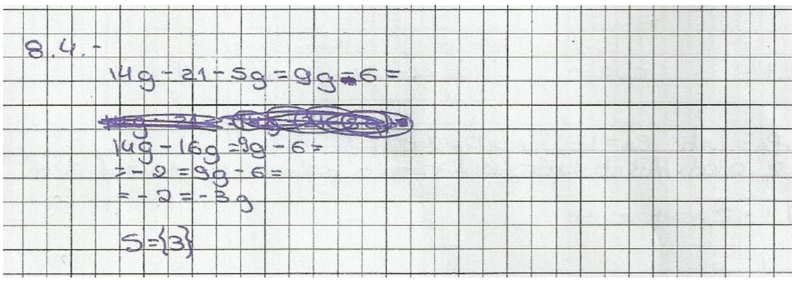
C: Depois acrescentei o simétrico de -6, que é 6, para anular o 6. Deu zero.
Na representação algébrica ficou:
3 – 6 + 6 + x
Depois na última representação:



Acho que x = 3.

A aluna não compreende que uma equação é uma igualdade entre duas expressões que envolve pelo menos uma letra a representar um valor desconhecido. Também não tem a noção do que é o 1º e 2º membros de uma equação. A aluna não percebe o que significa aplicar os princípios de equivalência, ou seja, que ao aplicá-los se obtêm equações equivalentes. A aluna vai passando de expressão em expressão e não de equação em equação. Conclui-se que esta aluna não percebe o que é resolver uma equação cometendo o erro de ausência de estrutura (*absence of stucture*).

Outros erros cometidos pela aluna foram erros de eliminação (*deletion*). Este erro ocorre três vezes na resolução da equação 8.4 (14g-21-5g=9g-6), quando soma -21 - 5g = -16g , também quando soma 14g - 16g = -2, e 9g - 6 = -3g. Além deste erro surge também o erro de divisão (*division*) onde a aluna conclui que se -2 = -3g então a solução é 3. A resolução da aluna foi a seguinte:



A aluna explica a sua resolução:

C: Então a equação era
14g – 21 – 5g = 9g – 6

Fiz 16g = 21 – 5g, donde,
= 14g – 16g = 9g -6

Depois -2 = 14g – 16g,
ficou = -2 = 9g – 6.

Vem -2 = -3g. Este 3g vem de 9g-6

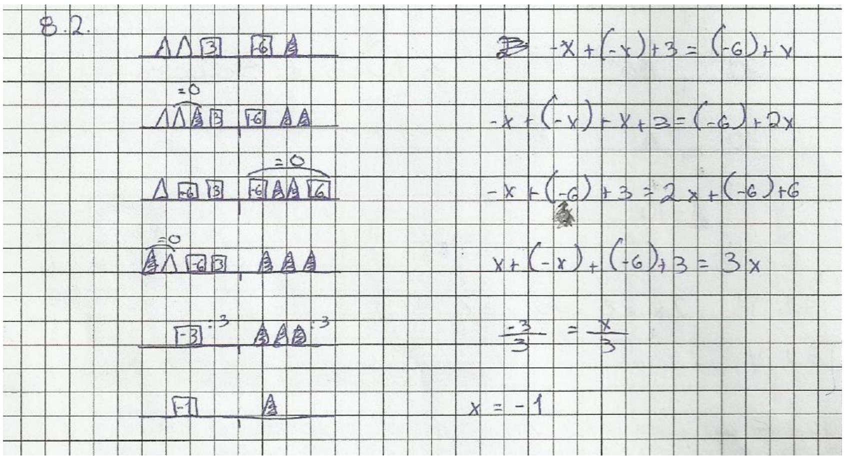
A aluna conclui que S = {3}

P: Porquê?
C: Acho que foi o resultado.

A aluna não percebe o que é reduzir termos semelhantes. Comete erros de eliminação (*deletion*) somando termos independentes com termos com incógnita. Isto é bem visível na sua resolução desta equação. A aluna também não sabe aplicar o 2º Princípio de Equivalência quando obtém -2 = -3g e chega à conclusão que a solução é 3, não sabendo explicar como o fez. Diz apenas que “acho que foi o resultado!”.

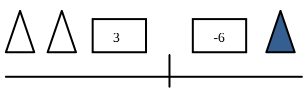
Daniel

Este aluno apenas cometeu um erro por redistribuição (*redistribution*) na resolução da equação 8.2 do teste (-2x+3=-6+x). O aluno soma -6 no 1º membro e soma 6 no 2º membro:

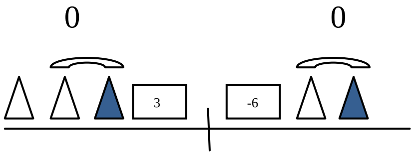


O aluno explica:

D: Fiz pictórica e algebricamente:



D: Adicionei o simétrico a –x, para poder anular … e tive também que adicionar ao 2.º membro para manter o equilíbrio.



P: E o que fizeste a seguir?
D: Depois adicionei 6 a cada um dos membros … não … como fiz isto? Não acredito, esqueci-me de por… não, isto aqui é um 6, espero que a Professora perceba… parece um -6, não é? Enganei-me, era 6!
P: Não te preocupes, faz lá bem agora!
D: A partir de onde?
P: Do início!
D: -6 … +3… não… -6 …-3 ou -6 + 3?
P: Diz-me tu!
D: Acho que é -6+3
P: Diz lá!
D: -6+3=-9.
P: Não, não é -9.
D: É -3?
P: É.
D: Atão, eu tenho bem…Deu-me -3 e dividi por 3.

O aluno resolveu a equação cometendo um erro de redistribuição (*redistribution*). Em entrevista o aluno apercebe-se do erro tentando corrigi-lo. No entanto, continuou a considerar -6, como tinha feito no teste, e não 6 como concluiu quando verificou que tinha cometido um erro. O aluno aplica corretamente os Princípios de Equivalência, tendo resolvido corretamente a equação apesar do erro cometido.

Turma

Em geral, os erros cometidos no teste pelos alunos da turma não diferem dos erros cometidos pelos alunos caso. Na resolução do teste, os alunos cometeram os mesmos erros dos já mencionados, tais como: erros de eliminação (*deletion*), erros de redistribuição (*redistribuition*), erros de divisão (*division*), erros por ausência de estrutura (*(absence of structure)* e distração. Os três primeiros fazem parte da tipificação de Hall, enquanto que o erro por distração está englobado, na tipificação de Socas, como erro com origem em atitudes afetivas ou emocionais (ex: falta de concentração, excesso de confiança, esquecimento,…).

Síntese

Nesta análise verifica-se que os alunos em estudo e a turma, apenas cometeram quatro tipos de erros tipificados por Hall (2002ª,2002b): eliminação, redistribuição, divisão e ausência de estrutura. Houve alunos que reconheceram os erros cometidos tentando ultrapassá-los. Por outro lado, houve alunos que cometeram erros mas não se aperceberam que os estavam a cometer, como por exemplo, o erro por ausência de estrutura. Os erros com origem em atitudes afetivas e emocionais, tipificado por Socas (1997), foi também comum na resolução das equações propostas.

6. Conclusões

Neste trabalho pretendeu-se identificar, analisar e categorizar os métodos de resolução e os erros cometidos pelos alunos na resolução de equações de 1º grau. Assim foram definidas as seguintes questões:

a) Quais os métodos que os alunos do 7º ano usam para resolver equações de 1º grau e como os justificam?
b) Em particular, quais os principais erros cometidos por alunos do 7º ano ao resolver equações de 1º grau e que razões lhes são subjacentes?

Para responder a estas questões foram escolhidos quatro alunos para este estudo, Andreia, Beatriz, Catarina e Daniel. Estes alunos foram escolhidos considerando: (1) diferentes níveis de desempenho, recorrendo ao aproveitamento escolar em Matemática nos 1º e 2º períodos letivos ; (2) ser a primeira vez que frequenta o 7.º ano; (3) capacidade de comunicação; (4) predisposição para participar no estudo e (5) possibilidade de reunir fora das aulas.

A recolha de dados baseou-se numa entrevista semi-diretiva, gravada em áudio e transcrita na íntegra; em produções escritas dos alunos, nomeadamente os cadernos diários; na observação e gravação vídeo de aulas; na pauta; no dossier da DT; e no PCT.

Neste capítulo é feita uma síntese da análise dos dados apresentada no capítulo anterior considerando separadamente os métodos de resolução, e os erros cometidos na de resolução de equações de 1º grau.

Métodos de resolução de equações de 1º grau

- Métodos usados nas aulas

A partir das produções escritas em sala de aula dos alunos em estudo, como o caderno diário, foi possível verificar que os alunos recorriam aos Princípios de Equivalência para resolver equações de 1º grau, efetuando a mesma operação em ambos os membros da equação. De referir que os alunos ainda recorreram frequentemente aos modelos apoiados nas balanças. Os alunos, ao resolver equações fizeram a representação pictórica e paralelamente a representação algébrica.

Outro método adotado foi o de tentativa erro. Este método é um método de resolução elementar. Este método só foi utilizado por uma aluna em estudo. Esta aluna possui uma noção mais desenvolvida do equilíbrio entre os membros de uma equação e do sentido de equivalência do sinal de igual (Freitas, 2002). Paralelamente, a aluna resolve a equação algebricamente.

Na resolução de equações com parênteses houve bastantes dificuldades. Na análise dos cadernos diários verificou-se a resolução destas equações, recorrendo aos seguintes métodos: à representação física na balança, resolvendo pictoricamente, e paralelamente a representação algébrica, ou aplicando a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição. Os alunos concluem a resolução destas equações aplicando os Princípios de Equivalência.

Outro procedimento na resolução de equações, aplicado por todos os alunos em estudo, é a redução de termos semelhantes. Em aula, os alunos resolveram corretamente as equações, aplicando os Princípios de Equivalência, obtendo equações equivalentes, e reduzindo do termos semelhantes.

No final da resolução das equações os alunos (nem sempre) fizeram a verificação da solução, substituindo o valor encontrado na equação inicial. Este método esteve presente nas produções escritas dos quatro alunos e permitiu compreender a noção de solução ou conjunto-solução como sendo o(s) valor(es) que torna(m) a igualdade verdadeira.

- Métodos usados no teste

Os métodos usados nos testes, pelos alunos em estudo, foram os mesmos que usados em aula. Aplicaram o 1º e 2º Princípios de Equivalência e reduzem os termos semelhantes. No entanto nem sempre fazem a verificação.

Houve uma aluna que não soube resolver as equações em estudo cometendo sempre o erro de ausência de estrutura. Este caso foi considerado quando estudados os erros.

A nível de turma, e de um modo geral, os alunos recorreram aos Princípios de Equivalência e à redução de termos semelhantes. Verifica-se que há alunos que ainda recorrem muito à representação pictórica. No entanto, há alunos que já abandonaram essa representação resolvendo as equações apenas algebricamente.

Outros métodos foram identificados. O método da substituição foi aplicado por um aluno no entanto, pictoricamente, isto é, o aluno substitui o pin pelo valor da solução da equação. Também houve uma aluna que optou por resolver a equação apenas pictoricamente.

Um método adotado por outro aluno foi o método da transposição. Muitos alunos aprendem a manipular equações de maneira mecânica usando o procedimento "Muda de lado – muda de sinal". Esta regra não foi dada em sala de aula. No entanto houve um aluno a aplicar esta regra em duas equações. Este aluno acabou por não resolver corretamente as equações consideradas.

Erros cometidos pelos alunos na resolução de equações de 1º grau

Da revisão da literatura efetuada, verifiquei que há várias tipificações para o erro. Para este trabalho optei pela tipificação de Hall(2002ª,2002b) e de Socas (1997). Em particular foram estudados os erros por (1) erros por eliminação (*deletion*), (2) erros por troca de membros (*switching addends*), (3) erros por redistribuição (*redistribution*), e (4) erros por transposição (*transposing error*), (5) erro na aplicação da operação inversa, (6) erro de divisão (*division*) (7) os erros de exaustão (exhaustion errors), (8) a ausência de estrutura (*absence of structure*). Foi também identificado um erro, categorizado por Socas (1997), como erros que têm a sua origem em atitudes afetivas e emocionais face à Matemática.

No entanto, analisando os erros cometidos pelos alunos, além destes erros considerados por Socas, apenas identifiquei quatro erros da tipificação de Hall (2002ª,2002b) e são os seguintes: erros por eliminação (*deletion*), erros por redistribuição (*redistribution*), erro de divisão (*division*) e a ausência de estrutura (*absence of structure)*

Segue-se um Quadro com os erros cometidos pelos alunos em estudo:

Quadro 3 – Erros na resolução das questões 8.1, 8.2, 8.3, 8.4 do teste segundo a Tipificação de Hall e Socas

ERROS COMETIDOS	ANDREIA	BEATRIZ	CATARINA	DANIEL
Eliminação (deletion)	8.4		8.4	
Troca de membros (switching addends)				
Redistribuição (redistribution)		8.2		8.2
Transposição (transposing error)				
erro na aplicação da operação inversa				
erro de divisão (division)			8.4	
Exaustão (exhaustion errors)				
Ausência de estrutura (absence of structure)			8.1, 8.2, 8.3, 8.4	
Erros com origem em atitudes afetivas e emocionais (Socas)		8.1.		

Como podemos ver nesta análise, os erros de eliminação, de redistribuição, de divisão e de ausência de estrutura, são os mais frequentemente cometidos pelos quatro alunos em estudo na resolução de equações de 1º grau. Verificou-se que, tanto nos casos em estudo como na turma ocorrem muitos erros por distração que poderiam ser evitados. Por outro lado há erros que são identificados pelos próprios alunos, que reconhecendo o erro, o tentam ultrapassar.

Podemos então concluir, como já referido, que o erro é um fenómeno inerente à aprendizagem que pode dar informações importantes ao professor sobre como o aluno está a pensar (Santos, 2010). Além disso "os erros influenciam a aprendizagem de diferentes conteúdos, e é imprescindível que se reconheçam e apoiem a necessidade de superá-los, a fim de obter sucesso na aprendizagem" (Engler, 2004, p.23, in Lima, 2010). O professor deve portanto reconhecer os erros dos alunos, fazer com que os alunos tomem consciência dos mesmos e os tentem superar, para que haja evolução na aprendizagem..

Reflexão

A lecionação de uma unidade de ensino foi uma experiência muito importante para a minha função como professora. Ajudou-me a crescer como profissional. Por um lado foi uma experiência muito enriquecedora e gratificante. Senti que estava a contribuir para a aprendizagem dos alunos, e que, de certo modo, estava a ser uma peça importante no seu percurso académico.

Com esta prática aprendi muito. Aprendi que se deve dar espaço aos alunos, centrar a aula nos alunos, e que devem existir discussões coletivas, permitindo a interação entre os alunos. Aprendi que se devem escolher tarefas de modo a cativar e envolver os alunos, possibilitando um trabalho autónomo por parte destes.

A maior dificuldade que senti foi a gestão da aula, tanto a nível de gestão de tempo, como gestão comportamento da turma, isto é, senti dificuldade em controlar a agitação da turma. Foi-me difícil encontrar estratégias de modo a contornar esta situação.

Tentei sempre cumprir a planificação, mas no entanto sinto que pequei ao fazê-lo, sinto que me distanciei do que era pretendido. Preocupada com o tempo, houve aulas em não dei tanta importância ao conteúdo em si. No entanto, esta questão foi ultrapassada nas aulas que se seguiram. Apercebi-me que mais importante que a planificação é o que se ensina, levando o tempo necessário para o fazer. Acho que melhorei bastante neste aspeto ao longo das aulas que lecionei.

Compreendi que devo criar uma proximidade e envolvimento com os alunos, criar uma relação de confiança, compreender os seus problemas, as suas dúvidas. Por outro lado acho que devia manter uma certa distância para evitar atrevimentos por parte dos alunos. Tive dificuldades em separar estas duas posições.

No final deste ciclo apercebi-me que a profissão de professor além de ser bastante gratificante é também exigente obrigando a um grande investimento por parte do professor.

De futuro procurarei analisar e refletir sobre as aulas lecionadas, pois julgo que esta análise desenvolve uma maior segurança na lecionação dos conteúdos em causa.

Para finalizar, exponho uma limitação deste estudo: a falta de dados para a análise dos métodos e erros cometidos pelos alunos, uma vez que grande parte dos alunos não resolveram as questões do teste aqui em estudo

Referências bibliográficas

Araújo, T. (2010). Concepções dos alunos do ensino fundamental sobre equivalência entre equações de 1º grau. Recife: Universidade Federal de Pernambuco Centro de educação.

Baldim, M.(2008). Resolução de problemas como metodologia de ensino e aprendizagem de equações de 1º grau. Londrina.

Bogdan, R. & Biklen, S. (1994). *Investigação Qualitativa em Educação*. Colecção Ciências da Educação. Porto: Porto Editora.

BORASI, Raffaella. Using Errors as springboards for the learning of mathematics; an introduction. **Focus on Learning Problems in Mathematics**, v.7, n-3-4, p.1-14, 1985.

Borasi, R. (1996). *Reconceiving mathematics Instruction*: a Focus on Errors. Norwood, NJ: Ablex Publishing Corporation.

Conceição, A., Almeida, M. (2010). Matematicamente falando 7. Areal Editores.

CURY, Helena Noronha. Retrospectiva Histórica e perspectivas atuais da analise de erros em Educação Matemática. **Revista Zetetiké**. Ano 3. no. 4/1995.

DAVIS, Cláudia; ESPÓSITO, Yara Lúcia. O papel e a função do erro na avaliação escolar. **Revista Brasileira de Estudos Pedagógicos**, v.72, n.171, p.196-206, mai/ago, 1990.

ENGLER, Adriana *et. al*. Los Errores en el Aprendizaje de Matemática. **Revista Premisa de la Sociedad Argentina de Educación Matemática,** v. 6, n. 23, p.23-32, nov. 2004.

Franchi, L. & Hernández, A. I. (2004). Topología de errores en el área de geometria plana. *Educere, Investigación Arbitrada*, *24*, 63-71.

Freitas, M. (2002). Equações de 1ºgrau: Método de resolução e análise dos erros no ensino médio. Pontifícia Universidade Católica. São Paulo.

GARBI, G. G. (2007), *O Romance das Equações Algébricas*, 2ª Edição, São Paulo: Editora Livraria da Física.

Hall, R. (2002a). An analysis of errors made in the solution of simple linear equations. (http://www.people.ex.ac.uk/PErnest/pome15/ hall_errors.pdf acedido em 20 de Maio de 2009)

Hall, R. (2002b). An analysis of thought processes during simplification of an algebraic expression. (http://www.people.ex.ac.uk/PErnest/pome15/ r_hall_expressions.pdf, acedido em 20 de Maio de 2009).

Lima, D. (2010). Erros no processo de resolução de equações de 1º grau. Belo Horizonte.

Lima, R. (2007). Equações algébricas no ensino médio: uma jornada por diferentes mundos da Matemática. PUC/SP São Paulo.

LINCHEVSKI, Liora; SFARD, Anna. Rules whithout reasons as processes whithout objects – The case of equations and inequalities. In: F. Furinghetti (Ed). **Proceedings of the 15th Conference of PME.** Assis, Italy, v. 2, 1991, p. 317-324. Disponível em: <http://www.eric.ed.gov/ERICDocs/data/ericdocs2sql/content_storage_01/0000019b/80/15/08/34.pdf> Acesso em de novembro de2009.

LÜDKE, Menga; ANDRÉ, Marli E. D. A. **Pesquisa em Educação:** Abordagens Qualitativas. São Paulo: Editora Pedagógica e Universitária Ltda., 1986. (Temas básicos de educação e ensino).

Matz, M. (1981). Building Metaphoric Theory of Mathematical Thought, *Journal of Mathematical Behavior*, *3*(1), 93-166.

Melara, R. (2008). O Ensino de Equações do 1º grau com significação: uma experiência prática no ensino fundamental. PDE – Colégio estadual Leonardo Da Vinci.

Ponte, J., Branco, N. e Matos, A. (2009) Álgebra no Ensino Básico. Ministério da Educação.

RICO, Luis. Errores y dificuldades en el aprendizaje de las matemáticas. In : KILPATRICK, J; Gomes, P. ; Rico, L. **Educación Matemática.** Colombia. Grupo Editorial Iberoamérica, p. 69-108. 1995.

RIVIÈRE, Angel. Problemas e Dificuldades na Aprendizagem da Matemática: uma Perspectiva Cognitiva**.** In: COLL, C.; PALÁCIOS, J.; MARCHESI, A (Org.). **Desenvolvimento Psicológico e Educação**. Necessidades educativas especiais e a aprendizagem escolar. Porto Alegre: Artes Médicas, v. 3, 1995.

ROCHA, I. C. Ensino da Matemática**:** formação para exclusão ou para a cidadania? **Educação Matemática em Revista**, n. 9/10, p.22-31, abril 2001.

Santos, L. (2002). Auto-avaliação regulada: porquê, o quê e como? In Paulo Abrantes e Filomena Araújo (Orgs.), Avaliação das Aprendizagens. Das concepções às práticas (pp. 75-84). Lisboa: Ministério da Educação, Departamento do Ensino Básico.

Santos, L., Pinto, J., Rio, F., Pinto, F., Varandas, J., Moreirinha, O., Dias, P., Dias, S. & Bondoso, T. (2010). Avaliar para aprender. Relatos de experiências de sala de aula do pré-escolar ao ensino secundário. Porto: Porto Editora e Instituto de Educação, Universidade de Lisboa.

Santos, V., Sodré, U. (2005). Matemática essencial: Fundamental: Expressões algébricas.

Torre, S. (1993). *Aprender de los errores. El tratamiento didáctico de los errores como estratégia de innovación*. Madrid: Editorial Escuela Española, S. A.

Vale,L., Ferreira,R., Santos,L. O erro como ponte para a aprendizagem das equações: O caso da Maria.

Vale, M. (2010). O erro como ponte para a aprendizagem em Matemática: um estudo com alunos do 7º ano do ensino básico. Instituto de Educação da Universidade de Lisboa.

www.matematicadidatica.com.br/Equacao.aspx

Anexos

Anexo 1 – Tarefa 1

Escola E.B. 2,3 Fernando Pessoa

Unidade de Equações – Tarefa 1 **Matemática – 7ºano**

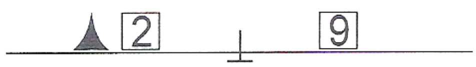
Aluno: ______________________________ n.º: ___ Turma: ___ Data: ____/____/_______
Ano Lectivo 2011/2012

Das seguintes figuras encontra o valor desconhecido para cada uma das situações e verifica se é válido:

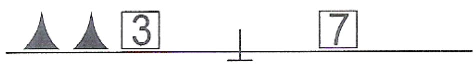
Verifica

1. 

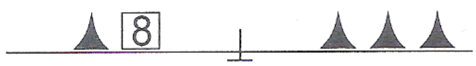
$x =$

2. 

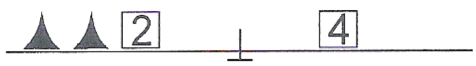
$x =$

3. 

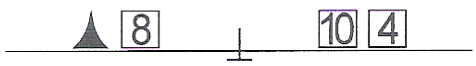
$x =$

4. 

$x =$

5. 

$x =$

6. 

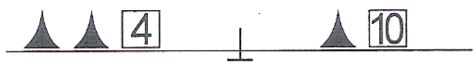
$x =$

7. 

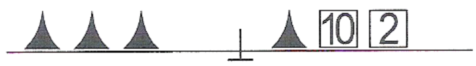
$x =$

8. 

$x =$

9. 

$x =$

10. 

$x =$

PARTE 2

Resolve as equações com o teu kit, representa todos os passos que efetuares e, no final, verifica a tua solução:

Verificação

1. $2x = x + 3$ $\qquad x =$

2. $3x = x + 4$ $\qquad x =$

3. $x + 4 = 2x + 3$ $\qquad x =$

4. $4x = 2x + 6$ $\qquad x =$

Resolve as figuras com o teu kit, representa todos os passos que efetuares e, no final, verifica a tua solução:

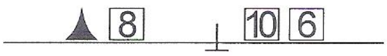
Verificação

5. 

$x =$

6. 

$x =$

7. 

$x =$

8. 

$x =$

9. 

$x =$

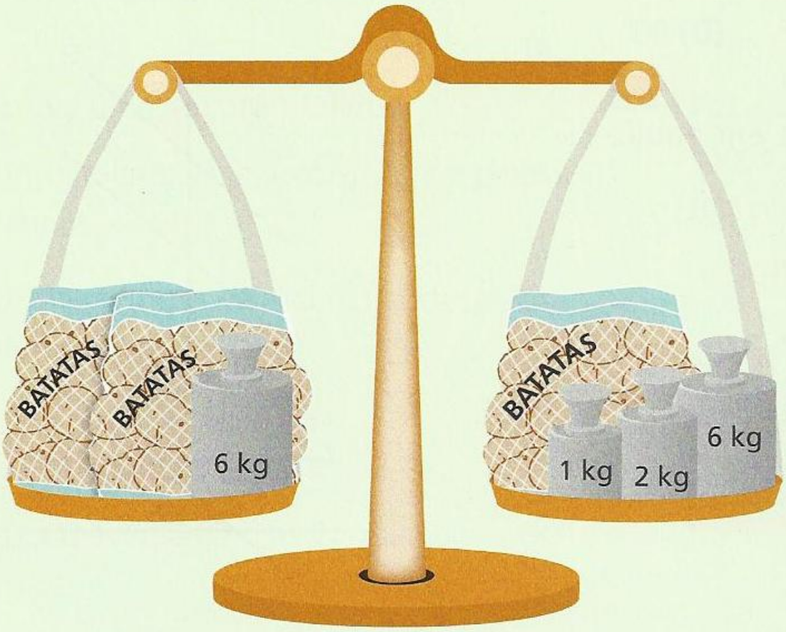
10. 

$x =$

Anexo 2 -Tarefa 5, pág. 168, do manual

TAREFA **5**

A balança da figura está em equilíbrio.



1 **a)** Se retirares 6 kg de cada um dos pratos, a balança continuará em equilíbrio?

b) E se passares 2 kg do prato da direita para o da esquerda?

c) E se retirares um saco de batatas de cada prato?

d) E se tirares os dois sacos do prato esquerdo e o do prato da direita?

e) E se colocasses uma massa de 5 kg em ambos os pratos?

2 Observando a figura, que massa terá cada um dos sacos de batatas? Explica a tua resposta. Poderás fazê-lo usando desenhos, cálculos, esquemas e palavras.

Anexo 3 - Exercícios 1 e 9, pág. 166, do manual

1 Para as equações seguintes, copia e completa o quadro:

Equações	$5x + 3 = 7$	$y - 9 = 4y + 2$	$8 = 6a + 1$	$3w + 3 + 4 = 0$
Primeiro membro				
Segundo membro				
Termos independentes				
Termos com incógnita				

9 Para cada equação só há uma solução. Qual?

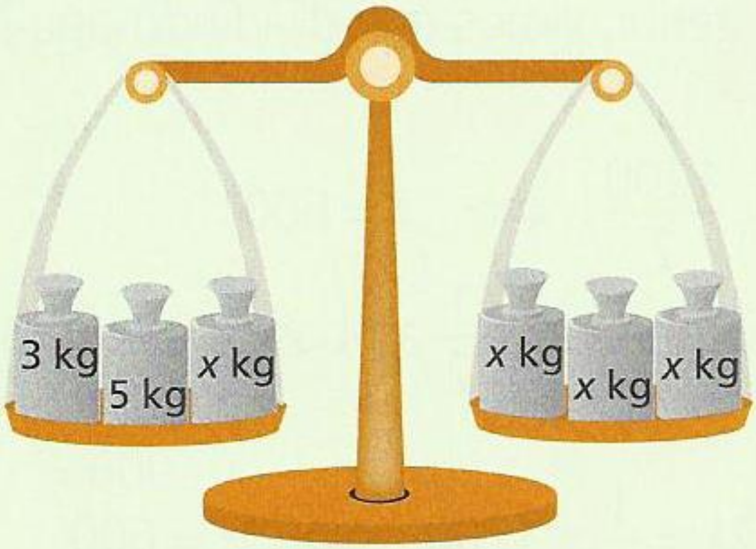
Equações	A	B	C	D
1. $x + 9 = 4$	5	13	-5	-13
2. $y + 2 = -5$	-3	7	3	-7
3. $z - 3 = -9$	-12	-6	6	12
4. $3t - 3 = 15$	4	12	15	6

Anexo 4 – Exercícios 2 e 7, pág. 172, do manual

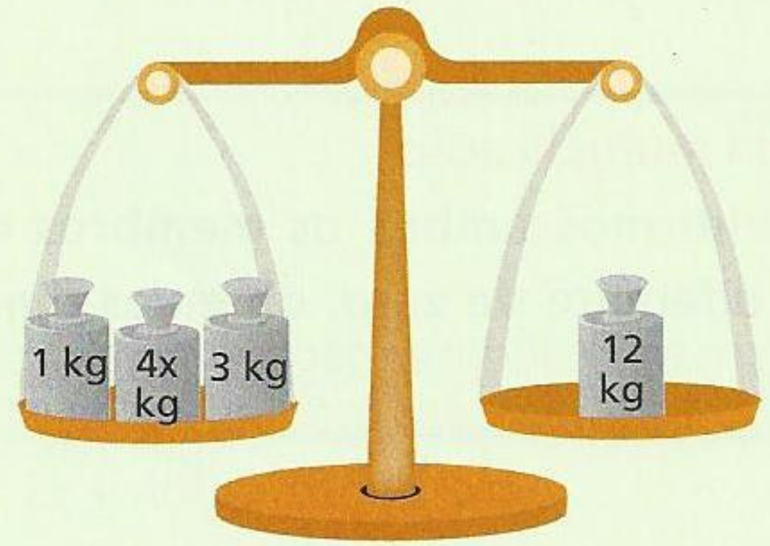
2 Traduz por uma equação cada uma das seguintes situações e encontra o valor de x:

a)

b)



c)



7 **Indica o conjunto-solução de cada uma das seguintes equações:**

a) $2m - 3 = 5 - 2m$

b) $-t + 7 = -10 - 1 + 2t$

c) $2x - 8 = -18$

d) $7x + 3 = 3$

Anexo 5 – Exercício 2 a), pág. 175 e Exercícios 4 a) e c), pág. 179, do manual

2 Determina o conjunto-solução de cada uma das seguintes equações:

a) $3x + 2(x - 1) = -2$

4 Resolve as equações:

a) $2x - 3(4 - x) = 5 + 4(2x + 1)$

b) $25 + 4(3x - 8) - 2(x + 6) = x - 9$

c) $5 - 3(1 - 2x) = 3x - 13$

Anexo 6 – Problema 1 a), pág. 175, do manual

1 **Determina a solução de cada um dos seguintes problemas:**

a) O triplo da diferença entre um número e 5 é 10. Qual é esse número?

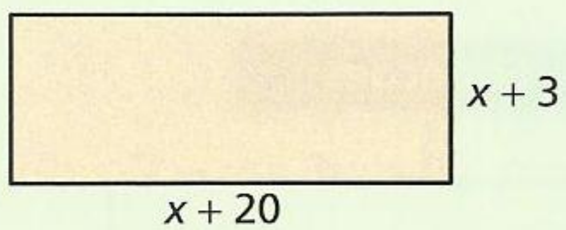
Anexo 7 – Problemas 3 e 5, pág. 178, do manual

3 **O André reparou que a soma dos dois números naturais pares e consecutivos que escreveu é 46.**

Quais são os números escritos pelo André?

5 **As dimensões do rectângulo da figura estão expressas em centímetros.**

Sabendo que o perímetro é 40 cm, determina as suas dimensões.

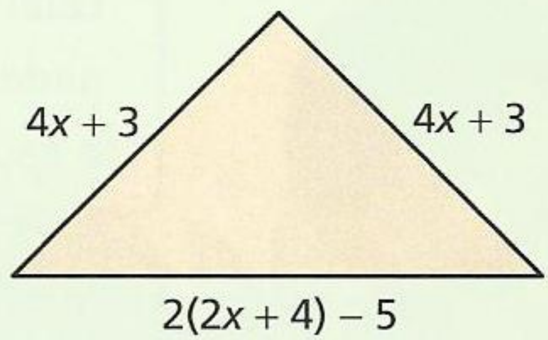


Anexo 8 – Problemas 1, 2 e 4, pág. 178 do manual

1 **A idade do André é o triplo da idade do Bernardo e o Bernardo tem menos doze anos do que o André.**

Qual a idade de cada um deles?

2 **Será que o triângulo da figura é equilátero? Justifica.**



4 **Numa festa, o número de raparigas excede em 5 o número de rapazes. Depois de saírem 3 raparigas ficaram ao todo 14 pessoas na festa.**

Quantos rapazes e raparigas havia inicialmente na festa?

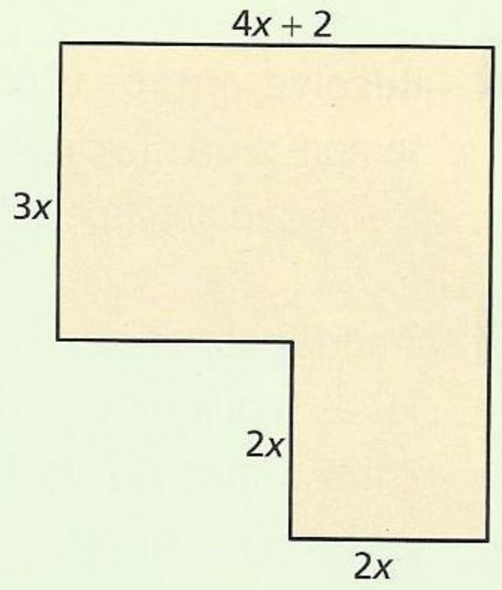
Anexo 9 – Problemas 8 e 9, pág. 179, do manual

8 **Quadrado e rectângulo…**

Considera um quadrado de lado $2x$ e um rectângulo de dimensões x e $x + 4$.

Para que valor de x as duas figuras têm o mesma medida de perímetro?

9 **Determina x de tal modo que a medida do perímetro da figura seja 85.**



Anexo 10 – Questões do teste em estudo

8. Resolve as seguintes equações, usando a **representação pictórica** e **algébrica**.

8.1 

8.2 

8.3 $15t - 6 = 14$

8.4 $14g - 21 - 5g = 9g - 6$

Anexo 11– Pedido de autorização aos Encarregados de Educação

Exmo. Sr. Encarregado de Educação:

A professora de Matemática do(a) seu (sua) educando(a), Catarina Isabel Pires de Carvalho, encontrando-se a preparar a dissertação de Mestrado em Ensino da Matemática, no Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, subordinada ao tema "Aprendizagem das equações de 1º grau: estudo com alunos do 7º ano de escolaridade", vem por este meio, **solicitar autorização** para, no âmbito do plano curricular previsto para o presente ano letivo, proceder à recolha de dados resultantes da observação do trabalho realizado pelo seu educando(a), que se mostrou interessado(a) em participar na respetiva investigação.

Com este estudo pretende-se analisar e compreender quais os métodos que os alunos do 7º ano usam para resolver equações de 1º grau e como os justificam. Em particular, quais os principais erros cometidos por alunos do 7º ano ao resolver equações de 1º grau e que razões lhes são subjacentes. E, como entendem os alunos do 7º ano a obtenção de equações equivalentes no processo da resolução de equações de 1º grau?

A avaliação dos alunos participantes no estudo **não será realizada de forma diferente** da dos restantes alunos da turma. Apenas o resultado do seu trabalho servirá de base à investigação. Pretende, portanto, autorização para utilizar fotocópia de algumas produções escritas do(a) aluno(a) e para utilizar as gravações **em áudio** das entrevistas e das aulas, em que esteve a trabalhar em grupo, no âmbito da investigação.

Da proveniência dos dados será mantido o anonimato do(a) aluno(a), não sendo divulgado o seu nome, turma ou Escola.

Desde já agradece a colaboração prestada.

Lisboa, __ de _________ de 2012

A professora de Matemática

…………………………………………………………………………………………

Autorizo o meu educando, …………………………………………………………., a colaborar na investigação acima descrita, bem como a facultar a análise, quer dos trabalhos por ele (a) produzidos, quer dos registos resultantes das gravações áudio necessárias à recolha de dados.

______________, ____ de ___________________ de 20__

O Encarregado de Educação

Anexo 12 - Planificações

Lição n.º	Data/Hora	Sala	Turma	Docente	Docente de substituição
	12 Abril				

Sumário (no final da aula)

Noção de equação. Significado de membro, termo, incógnita e solução de uma equação, com recurso ao materiais: "Hands-on-equations". Exploração de tarefas sobre equações. Noção de equações equivalentes.

Tópicos/Subtópicos

Noção de equação – Demonstração e utilização dos materiais hands-on-equations.

Objetivos específicos

• Noção de equação.
• Significado de membro e termo.
• Significado de incógnita e solução da equação.
. Noção de equações equivalentes

Recursos

Papel e lápis
Materiais hands-on-equations
Ficha de trabalho
Manual

Capacidades transversais

• Resolução de problemas; • Raciocínio matemático; • Comunicação matemática.

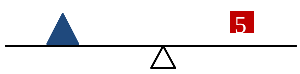
Desenvolvimento da aula

• Resolução,a pares, da **Tarefa 1 (ficha de trabalho – Parte 1) e Tarefa 4** (página 161).

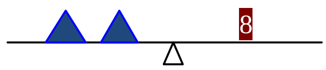
No 7.º ano, no tópico das sequências, os alunos usaram uma relação funcional, onde aparece um termo independente e um termo dependente. Em algumas situações, partindo do termo geral os alunos tinham que determinar a ordem de um determinado termo. A noção de equação apareceu de forma intuitiva e houve alunos que conseguiram chegar à solução da equação, através das operações inversas às usadas na expressão algébrica.

(10 a 15 min) A aula será iniciada com uma discussão em grande grupo, que visa a introdução dos materiais Hands-on-equations.

Assim, procura-se que os alunos compreendam o significado de



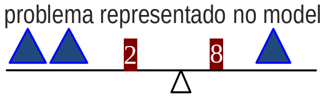
Se olharmos para a representação (modelo físico) o que podemos dizer?
Que x=5.



Se olharmos agora para a representação o que podemos dizer?

O significado de 2x= 8: Como ambos os lados da balança têm o mesmo valor então x=4. Importante verificar esta situação representando 4+4=8, logo 8=8.

Passando a uma situação mais complexa, pede-se para os alunos procurem resolver o problema representado no modelo:



Por tentativa os alunos podem ser questionados se o valor desconhecido pode ser 1? Ou 2? Etc?

Os alunos vão perceber que esta igualdade só é válida se x=6. Assim pede-se que verifiquem na situação inicial com 6+6+2=8+6, ou seja 14=14.

De seguida são distribuídos os Kits dos alunos por cada mesa e o enunciado da **tarefa 1**. No trabalho a pares sugere-se que os cubos com os números sejam considerados os valores que ficam a apontar para o teto. Assim, ambos os alunos conseguem ver os valores que estão a considerar. Antes de iniciarem a resolução, pede-se aos alunos que registem todos os passos que deram origem à solução da equação, e também o processo de verificação (5 min, dando tempo para os alunos "brincarem" com o kit).

O trabalho autónomo dos pares é de (15 a 20 min). Caso se verifique será feita a correção da questão 1 e 2 para ajudar os grupos que estão com dificuldade em realizar a tarefa. Igualmente poderá servir para concentrar os alunos na tarefa caso esteja a haver muita brincadeira com o Kit.

A correção (10 min) será feita pelos alunos no quadro, também a pares, sendo convidado o par a vir ao quadro e registar o seu raciocínio e verificação. No final chamar a atenção das equações que são equivalentes, explicando porquê.

Dificuldades: Logo na pergunta 4, vão aparecer incógnitas nos dois membros. Colocar a questão: *Se retirarmos a ambos os membros uma peça desconhecida, há alteração na igualdade?* O objetivo é munir os alunos de uma estratégia que permite obter uma equação equivalente e facilita encontrar o valor da incógnita. Caso haja algum aluno que avance com esta hipótese pedir para ele justificar a sua estratégia.

Depois da tarefa 1 será realizada a tarefa 4 da página 161, usando o Kit e efetuando os registos segundo a representação da tarefa 1, que permite compreender: o uso das operações e das suas inversas; a noção de equação e solução. A tarefa será corrigida no quadro pelos alunos (total 20 min)

Dificuldade: Traduzir o problema para a representação física no Kit. Caso seja necessário sugerir que cada caixa seja representada por um 

A segunda dificuldade poderá surgir na pergunta dois em que os valores não são possíveis de representar com os cubos do Kit. Vai obrigar os alunos a se desprenderem do kit, embora socorrendo-se da sua mecânica.

(construída com a ajuda dos alunos 15 min) Como síntese dos conceitos que foram abordados na tarefa, será escrita a definição de equação, significado de membro e termo, assim como o significado de incógnita e solução da equação.

Equação: é uma igualdade entre duas expressões que envolve pelo menos uma letra a representar um valor desconhecido, que se designa por **incógnita**.

De cada lado do sinal de igual estão os **membros da equação**: o 1.º membro à esquerda do sinal de igual e o 2.º membro à direita do sinal de igual.

A cada parcela chama-se **termo**. Os termos sem incógnita designam-se por **termos independentes**.

Resolver uma equação é procurar o valor (ou valores) da incógnita que tornam a igualdade verdadeira. A cada um desses valores chama-se **raiz** ou **solução da equação**.

O **conjunto das soluções** de uma equação é designado por conjunto-solução e representa-se simbolicamente por **S** ou **CS.**

Noção de **equações equivalentes** são equações que têm as mesmas soluções, ou seja, o mesmo conjunto solução.

Escrita do sumário: 2 min.

Aprendizagem complementar (TPC, trabalhos escritos, ...)

• Resolução dos exercícios 2 e 3 da página 164 do manual.

Avaliação

A avaliação será feita, através, por exemplo:

• Da observação direta (interesse, empenho, sociabilidade);

• Do diálogo com os alunos (qualidade da participação);

• Da realização das tarefas propostas.

Pedagogia diferenciada *

Ter atenção aos registos efetuados por estes alunos. Se necessário dar-lhes outras equações para eles resolverem como complemento da tarefa 1 e em substituição da tarefa 4.
Por exemplo: 5+x=8; 13= x-7; -7+x=-7

Observações *

Esquema de tempos:

Introdução aos materiais: 10 a 15 min
Tarefa 1, parte 1: 35 min
Tarefa 4: 20 min
Síntese: 15 min
Escrita de Sumário e TPC: 2 min.

* Alterações ao plano de aula / notas relevantes

Lição n.º	Data/Hora	Sala	Turma	Docente	Docente de substituição
	16 Abril				

Sumário (no final da aula)

Exploração de tarefas sobre equações com recurso ao materiais:"Hands-on-equations. Noção de equações equivalentes. Princípios de equivalência.

Tópicos/Subtópicos

Noção de equação – Demonstração e utilização dos materiais hands-on-equations.; **Princípios de equivalência**

Objetivos específicos

Noção de equações equivalentes
Princípio de equivalência da adição.
Princípio de equivalência da multiplicação.

Recursos

Papel e lápis
Materiais hands-on-equations
Ficha de trabalho
Manual

Capacidades transversais

• Resolução de problemas; • Raciocínio matemático; • Comunicação matemática.

Desenvolvimento da aula

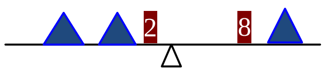
Escrita do sumário (2 min).

No início da aula serão relembrados os conceitos introduzidos na aula anterior (3 min):

- Noção de equação.
- Significado de membro e termo.
- Significado de incógnita e solução da equação.

A partir das soluções das equações da Tarefa 1, introduz-se o conceito de **equações equivalentes:** Duas equações são equivalentes quando têm a mesma solução, ou seja, que possuem o mesmo conjunto solução.
Verificar-se –á que as equações 4), 7) e 8) são equivalentes, e que as equações 6), 9) e 10) também são equivalentes (5 min).

Na aula anterior foi pedido aos alunos que resolvessem o problema representado no modelo:



Os alunos verificaram que esta equação só é válida se x=6. Os alunos verificaram a solução na situação inicial com 6+6+2=8+6, ou seja 14=14.

Este exemplo vai ser retomado para introduzir a representação algébrica das equações. Paralelamente à representação pictórica, vai-se escrevendo a resolução algébrica, fazendo sempre ligação entre as duas. O aluno deve compreender esta correspondência (10 min.).

Após a resolução algébrica da equação introduz-se **o 1º princípio de equivalência:** Se adicionarmos ou subtrairmos a mesma quantidade a ambos os membros de uma equação obtemos uma equação equivalente (5 min).

Resolução,a pares, da **Tarefa 5 (pág.168)** (15 min)

Para a resolução desta tarefa, serão distribuídos os Kits dos alunos por cada mesa. No trabalho a pares sugere-se que os cubos com os números sejam considerados os valores que ficam a apontar para o teto. Assim, ambos os alunos conseguem ver os valores que estão a considerar. Antes de iniciarem a resolução, pede-se aos alunos que registem todos os passos que deram origem à solução da equação, e também o processo de verificação.
A correção (5 min) da questão 1) será feita oralmente e posteriormente registada no quadro. A correção da questão 2) da tarefa (5 min) será feita pelos alunos no quadro, também a pares, sendo convidado o par a vir ao quadro e registar o seu raciocínio e verificação. No final chamar a atenção ao 1º princípio de equivalência aplicado nesta tarefa..

É esperado que os alunos façam a representação pictórica e a respetiva representação algébrica da equação envolvida nesta tarefa.

Dificuldades: Traduzir o problema para a representação física no Kit. Caso seja necessário sugerir que cada saco de batatas seja representada por um $\triangle$

Depois da Tarefa 5 ,pede-se aos alunos que resolvam as seguintes equações, com auxilio do Kit, usando a representação pictórica e a representação algébrica:

$2x - 5 = 5 + x$ (5 min)
$2x - 3 = 6 - x$ (5 min)

Na 1ª equação aplica-se o 1º princípio de equivalência. Ao resolver a 2ª equação introduz-se o **2ª princípio de equivalência:** Se multiplicarmos ou dividirmos ambos os membros de uma equação por um número diferente de zero, obtemos uma equação equivalente (5 min).

Os alunos usando o Kit e efetuam os registos da resolução das equações dadas, que permite compreender o uso das operações e das suas inversas; a noção de equação e solução. As equações serão corrigidas no quadro pelos alunos (total 5 + 5 min)

Para concluir a aula retoma-se a Tarefa 1 (da última aula) e resolve-se a Parte 2, aplicando os princípios de equivalência estudados nesta aula (15 min).

Aprendizagem complementar (TPC, trabalhos escritos, ...)

• Resolução dos exercícios 1 e 9 da página 166 do manual.

Avaliação

A avaliação será feita, através, por exemplo:

• Da observação direta (interesse, empenho, sociabilidade);
• Do diálogo com os alunos (qualidade da participação);
• Da realização das tarefas propostas.

Pedagogia diferenciada *

Ter atenção aos registos efetuados por estes alunos. Se necessário dar-lhes outras equações para eles resolverem como complemento da tarefa 1 e em substituição da tarefa 5.
Por exemplo: $5+x=8$; $13= x-7$; $-7+x=-7$

* NEE / estratégias de remediação / planos de recuperação / planos de desenvolvimento

Observações *

Esquema de tempos:

Resumo da aula anterior: 5 min
Noção de equação equivalente: 5 min
Exploração do exemplo da aula anterior: 15 min
1ª Princípio de equivalência: 5 min
Tarefa 5: 10 min (+correção: 5 min)
Exercícios: 10 min (+correção: 10 min)
2ª Princípio de equivalência: 5 min
Tarefa 1 – 2ª Parte: 10 min (+correção: 10 min).

* Alterações ao plano de aula / notas relevantes

Lição n.º	Data/Hora	Sala	Turma	Docente	Docente de substituição
	17 Abril				

Sumário (no final da aula)

Correção do trabalho de casa.
Resolução de exercícios.

Tópicos/Subtópicos

Noção de equação – Demonstração e utilização dos materiais hands-on-equations.; **Princípios de equivalência**

Objetivos específicos

- Noção de solução de uma equação.
- Princípio de equivalência da adição.
- Princípio de equivalência da multiplicação.

Recursos

- Papel e lápis
- Materiais hands-on-equations
- Ficha de trabalho
- Manual

Capacidades transversais

• Raciocínio matemático; • Comunicação matemática.

Desenvolvimento da aula

Escrita do sumário (2 min).

No início da aula serão relembrados os conceitos introduzidos na aula anterior (3 min):

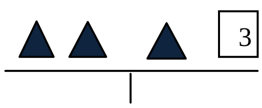
- Noção de equação.
- Significado de membro e termo.
- Significado de incógnita e solução da equação.

Correção do trabalho de casa (Ex. 1 e 9, pág. 166)
No exercício 1 (pág. 166) espera-se que o aluno complete o quadro corretamente. O aluno já saberá distinguir o 1º do 2º membro, tal como distinguir termos independentes de termos com incógnita.**(10 min)**
Dificuldades: O aluno pode não considerar termos independentes e termos com incógnita com sinal negativo. Por exemplo, na 2º equação: $y - 9 = 4y + 2$, poderá haver dúvidas quanto ao termo independente -9. É possível que o aluno diga que os termos independentes são 9 e 2. Deve-se explicar esta diferença: o termo independente será, na realidade, -9 e porquê. Apresentar outros exemplos, como por exemplo, comparar $x + 3 = 9$ e $x - 3 = 9$. Verificar que os termos independentes não são iguais nas duas equações.
O aluno poderá ter alguma dúvida ao lidar com equações em que a letra da incógnita não é x. Explicar que numa equação o valor desconhecido poderá ser representado por qualquer letra (normalmente minúscula).

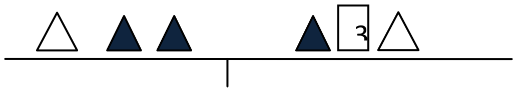
No exercício 9 (pág. 166) é expectável que o aluno determine a solução das equações pelo método da substituição.
É feita a verificação das hipóteses dadas até chegar a uma igualdade verdadeira entre o 1º e 2º membros. **(4x5= 20 min)**
Dificuldades: De igual modo como no caso anterior, o aluno poderá ter dúvidas quanto às letras que representam as incógnitas. Este problema foi ultrapassado na alínea anterior.
O aluno poderá confundir a solução da equação com o valor que verifica a igualdade. Por exemplo, na equação $x + 9 = 4$, a solução é -5. No entanto, ao fazer a verificação, obtemos: $-5 + 9 = 4 \Leftrightarrow 4 = 4$. De salientar e explicar, que a solução não é 4 mas sim -5.

Resolução da Parte 2 da Tarefa 1 da última aula. **(4x10 = 40 min)**
Para resolver estas equações os alunos devem recorrer aos kits Hands-on-equations.

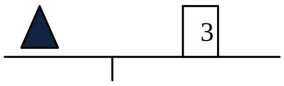
<u>Primeiro passo:</u> o aluno representa a equação no kit.
Exemplo 1:
Ex. 1) $2x = x + 3$



Segundo passo: Pretendendo isolar os termos com incógnita o aluno deve perceber que tem que anular o x do 2º membro. Como? Somando a ambos os membros o simétrico de x: -x



Terceiro passo: Retirar as quantidades simétricas:



Quarto passo: Escrever solução: x = 3

Quinto passo: Verificação (sempre na 1ª equação):

2x(3) = 3+3

6 = 6 Proposição verdadeira (*)

Paralelamente, o aluno escreve a representação algébrica:

Primeiro passo: 2x = x + 3
Segundo passo: 2x + (-x) = x + (-x) + 3 (somar o inverso de x: -x : **1º princípio de equivalência**)
Terceiro passo: x = 3
Quarto passo: S= {3}
Quinto passo: Substituir 3 na 1ª equação dada:

2x (3) = 3 + 3 ⇔ 6 = 6.

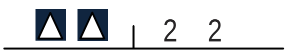
Para resolver esta equação os alunos aplicam o 1º princípio de equivalência (Relembrar: **1º princípio de equivalência:** Se adicionarmos ou subtrairmos a mesma quantidade a ambos os membros de uma equação obtemos uma equação equivalente

Exemplo 2:
Ex. 2) 3x = x + 4
Primeiro passo: o aluno representa a equação no kit.

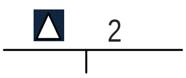
Segundo passo: Pretendendo isolar os termos com incógnita o aluno deve perceber que tem que anular o x do 2º membro. Como? Somando a ambos os membros o simétrico de x: -x

Terceiro passo: Retirar as quantidades simétricas:

Aqui poderá surgir uma **dificuldade:** O que fazer quando temos mais do que um x? O aluno deve perceber que se duas quantidades iguais são iguais a 4, então cada uma delas deve valer 2.



Quarto passo:



Quinto passo: Escrever solução: x = 2

Sexto passo: Verificação (sempre na 1ª equação):

3x (2) = 2 + 4

6 = 6 Proposição verdadeira (*)

Paralelamente, o aluno escreve a representação algébrica:

Primeiro passo: $3x = x + 4$
Segundo passo: $3x + (-x) = x + (-x) + 4$ (somar o simétrico de x: -x : **1º princípio de equivalência**)
Terceiro passo: $2x = 4$
Quarto passo: : Dividir ambos os membros por dois. $\frac{2x}{2} = \frac{4}{2}$ o que equivale a **x = 2. Porquê?** Porque para obter x temos que dividir ambos os membros pelo número de incógnitas que temos, neste caso 2. (**2ª princípio de equivalência**)

Quinto passo: S= {2}
Sexto passo: Substituir 2 na 1ª equação dada:
$3x(2) = 2 + 4 \Leftrightarrow 6 = 6$. Proposição verdadeira (*)

Para resolver esta equação os alunos aplicam o 1º e o 2º princípios de equivalência (Relembrar: **2ª princípio de equivalência:** Se multiplicarmos ou dividirmos ambos os membros de uma equação por um número diferente de zero, obtemos uma equação equivalente).

O exercício 3 é análogo ao exercício 1. Aplica-se o 1º princípio de equivalência.

O exercício 4 é análogo ao exercício 2 Aplicam-se o 1º e 2º princípios de equivalência.

(*) Fazer notar que a solução da equação não é o valor que obtemos na verificação.

Os restantes exercícios da Parte 2 da Tarefa 1 **(**caso não seja resolvida na aula ficará para trabalho de casa.

Aprendizagem complementar (TPC, trabalhos escritos, ...)

TPC

Avaliação

A avaliação será feita, através, por exemplo:
- Da observação direta (interesse, empenho, sociabilidade);
- Do diálogo com os alunos (qualidade da participação);
- Da realização das tarefas propostas.

Pedagogia diferenciada *

Observações *

Esquema de tempos:

Resumo da aula anterior: 5 min
Correção do Ex.1 (pág.166): 10 min
Correção do Ex.9 (pág.166): 4x5=20 min
Parte 2 (Tarefa 1): 4x10=40 min
Parte 3 (Tarefa 1): 15 min

* Alterações ao plano de aula / notas relevantes

Lição n.°	Data/Hora	Sala	Turma	Docente	Docente de substituição
	19 Abril				

Sumário (no final da aula)

Resolução de exercícios.
Noção de termos semelhantes.

Tópicos/Subtópicos

Noção de equação – Demonstração e utilização dos materiais hands-on-equations.; **Princípios de equivalência**

Objetivos específicos

Noção de equações equivalentes
Princípio de equivalência da adição.
Princípio de equivalência da multiplicação.
Noção de termos semelhantes.

Recursos

- Papel e lápis
- Manual
- Material Hands-on-equations

Capacidades transversais

• Comunicação matemática.

Desenvolvimento da aula

Escrita do sumário (2 min).

No início da aula serão relembrados, a partir de um exemplo, os conceitos introduzidos nas aulas anteriores:

- Noção de equação.
- Significado de membro e termo.
- Significado de incógnita e solução da equação
- 1º Princípio de equivalência
- 2º Princípio de equivalência

Para esta aula estão previstos os Exercícios 2 e 7 da página 172.

Resolução do **Exercício 2 (pág. 172)**

Pretende-se neste exercício que o aluno traduza cada uma das situações por uma equação e encontre o valor de x.
Partindo da representação na balança, o aluno facilmente faz a representação pictórica da resolução da equação.

Dificuldades:
<u>1º passo:</u> interpretar o enunciado: Questionar turma se entenderam o que se pede. O aluno poderá ter dificuldades em interpretar a balança, isto é, entender o equilíbrio entre os dois pratos. Para que a balança esteja em equilíbrio é necessário que o que está do lado esquerdo tenha o mesmo valor(peso) do que o que está do lado direito. O aluno terá que traduzir para o papel o que está representado na balança.

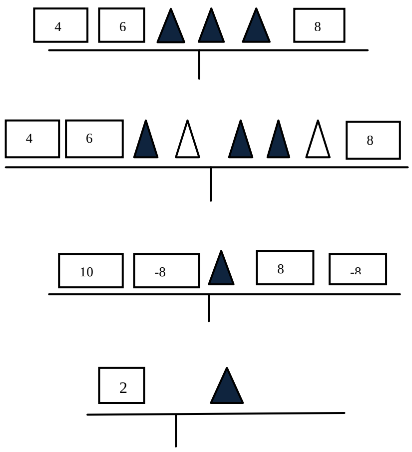
<u>2º passo:</u> Resolução da equação: Os alunos, numa primeira fase, podem sempre recorrer aos materiais hands-on-equations, e à representação pictórica. Será chamado um par de alunos ao quadro: um resolve na balança, enquanto o outro aluno faz a representação pictórica e algébrica no quadro.
É esperado que os alunos já saibam aplicar os princípios de equivalência. Abrir a questão à turma: Quais são os princípios de equivalência? **1º princípio de equivalência**: **:** Se adicionarmos ou subtrairmos a mesma quantidade a ambos os membros de uma equação obtemos uma equação equivalente; **2º princípio de equivalência:** Se multiplicarmos ou dividirmos ambos os membros de uma equação por um número diferente de zero, obtemos uma equação equivalente.

<u>3º passo:</u> Escrever a solução e a sua verificação.

NOTA: No desenvolver deste exercício será introduzida a noção de termos semelhantes, e a redução **de termos semelhantes**: só podemos associar termos com incógnita com termos com incógnita ou termos independentes com termos independentes.

a) $4 + 6 + x = x + x + 8$

Representação Pictórica:



Representação Algébrica:

$4 + 6 + x = x + x + 8$

Aplicar 1º princípio de equivalência

$4 + 6 + x + (-x) = x + x + (-x) + 8$

Reduzir termos semelhantes

$10 = x + 8$

Aplicar 1º princípio de equivalência

$10 + (-8) = x + 8 + (-8)$

Reduzir termos semelhantes

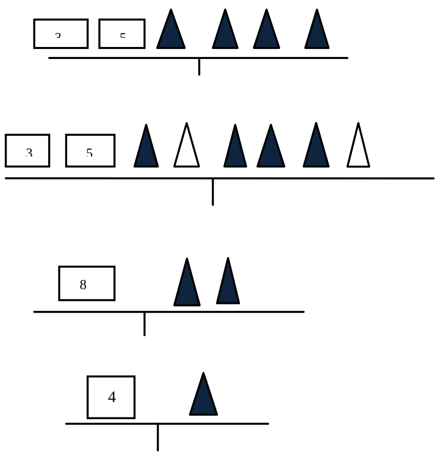
$2 = x$

$S = \{2\}$

Verificação:
4 + 6 + 2 = 2 + 2 + 8 (?)
12=12 Proposição Verdadeira

b) $3 + 5 + x = x + x + x$

Representação Pictórica:



Representação Algébrica:

$3 + 5 + x = x + x + x$

Aplicar 1º princípio de equivalência

$3 + 5 + x + (-x) = x + x + x + (-x)$

Reduzir termos semelhantes

$8 = 2x$

Aplicar 2º princípio de equivalência

$8/2 = 2/2x$

$4 = x$

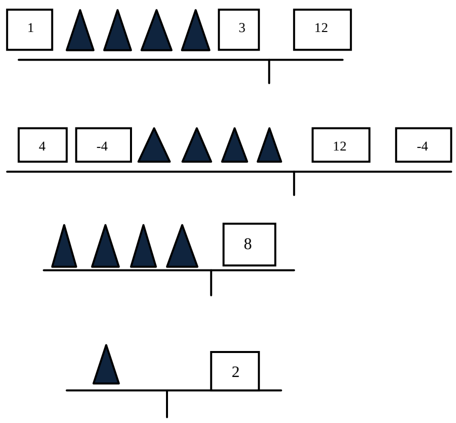
$S = \{4\}$

Verificação:
3 + 5 + 4 = 4 + 4 + 4 (?)
12 = 12 Proposição verdadeira

Dificuldade: o aluno pode não perceber qual é a quantidade pela qual se deve dividir os dois membros da equação aplicando o 2º princípio de equivalência. Justificar que temos de dividir pelo número de vezes em que aparece a incógnita (isto é, o coeficiente da incógnita).

c) 1 + 4x + 3 = 12

Representação Pictórica:



Representação Algébrica:

1 + 4x + 3 = 12 — **Reduzir termos semelhantes e aplicar 1º princípio de equivalência**

4 + 4x + (-4) = 12 + (-4)

Reduzir termos semelhantes

4x = 8

aplicar 2º princípio de equivalência

4/4x = 8/4

x = 2 — **S= {2}**

Verificação:
1 + 4x2 + 3 = 12 (?)
1 + 8 +3 = 12 (?)
12 = 12 Proposição verdadeira

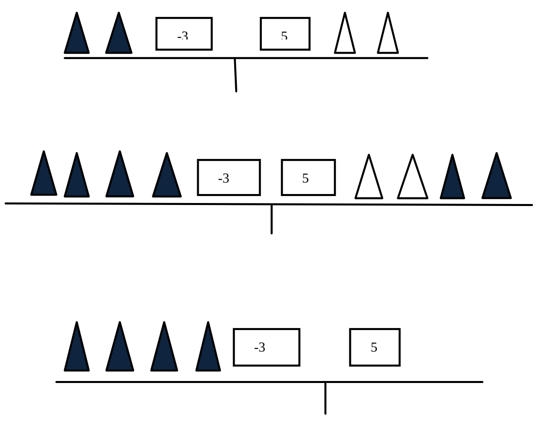
NOTA: Acabado este exercício espera-se que o aluno já tenha interiorizado a noção de equilíbrio e de **equações equivalentes**, ou seja, duas equações são equivalentes quando têm a mesma solução. Mas, pegando no exercício anterior, podemos garantir que
1 + 4x + 3 = 12 e 4x = 8 são equivalentes, porque de uma para outra foi aplicado o 1º princípio de equivalência, que nos garante que se adicionarmos ou subtrairmos a mesma quantidade a ambos os membros de uma equação obtemos uma equação equivalente

Resolução do **Exercício 7 (pág. 172)**

Este exercício serve de consolidação da resolução de equações de 1º grau. É pedido ao aluno que faça a representação pictórica, e paralelamente a representação algébrica.
Dificuldade: O aluno poderá ter dificuldades em associar a incógnita a uma letra diferente de x. Recordar a definição de equação: Uma equação é uma igualdade entre duas expressões que envolve **pelo menos uma letra** a representar um número desconhecido. Ou seja, o aluno deve compreender que podemos representar a incógnita por x, m, t, ou qualquer outra letra, representando o valor desconhecido.

a) 2m – 3 = 5 – 2m

Representação Pictórica:



Representação Algébrica:

2m – 3 = 5 – 2m

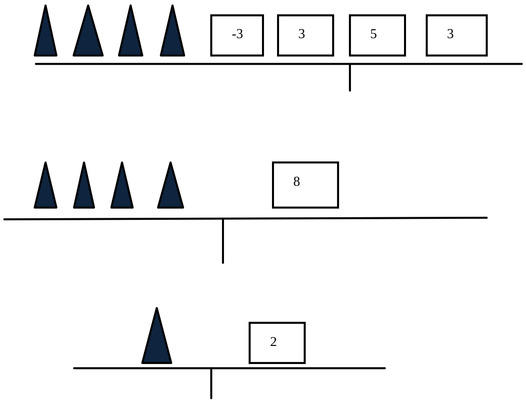
Aplicar 1º princípio de equivalência

2m + 2m – 3 = 5 – 2m + 2m

Reduzir termos semelhantes

4m – 3 = 5

Aplicar 1º princípio de equivalência



4m – 3 + 3 = 5 + 3

Reduzir termos semelhantes

4m = 8

Aplicar 2º princípio de equivalência

4/4m = 8/4

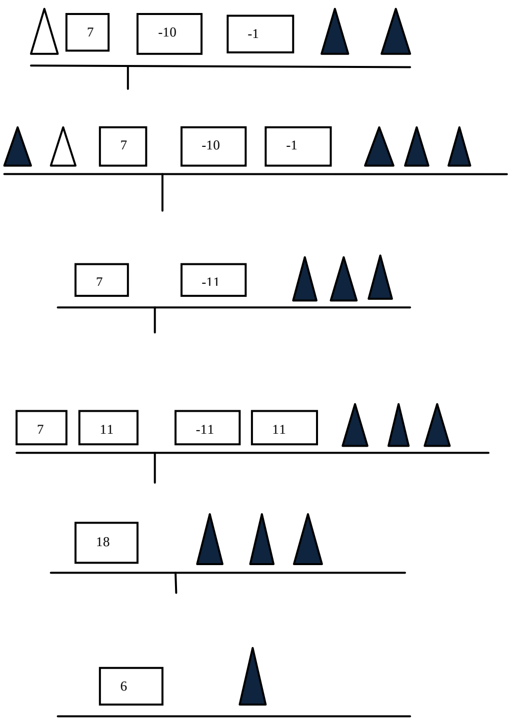
m = 2 **S = {2}**

Verificação:
2x2 – 3 = 5 – 2x2 (?)
4 – 3 = 5 – 2 (?)
1=1 Proposição verdadeira

Nota: Caso haja dúvidas relativamente aos princípios de equivalência pedir aos alunos que os enunciem, e a partir da representação na balança verificar que, ao aplica-los, o equilíbrio mantém-se.

b) –t + 7 = -10 – 1 + 2t

Representação Pictórica: **Representação Algébrica:**



–t + 7 = -10 – 1 + 2t

Aplicar 1º princípio de equivalência

t – t + 7 = -10 -1 + 2t + t

Reduzir termos semelhantes

7 = -11 + 3t

Aplicar 1º princípio de equivalência

7 + 11 = -11 + 11 + 3t

Reduzir termos semelhantes

18 = 3t

Aplicar 2º princípio de equivalência

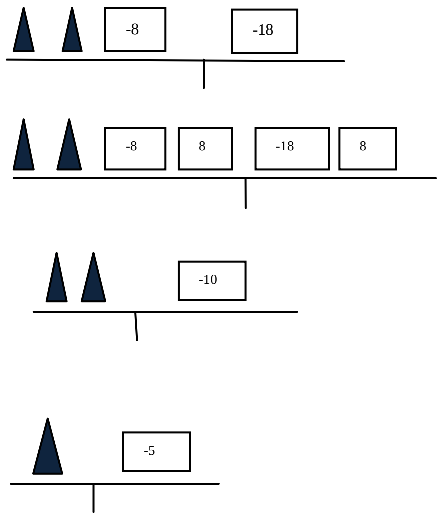
18/3 = 3/3t

6 = t **S= {6}**

Verificação:
-6 + 7 = -10 -1 + 2x6 (?)
1 = -11 + 12 (?)
1 = 1 Proposição verdadeira

c) $2x - 8 = -18$

Representação Pictórica:



Representação Algébrica:

$2x - 8 = -18$

Aplicar 1º princípio de equivalência

$2x - 8 + 8 = -18 + 8$

$2x = -10$

Aplicar 2º princípio de equivalência

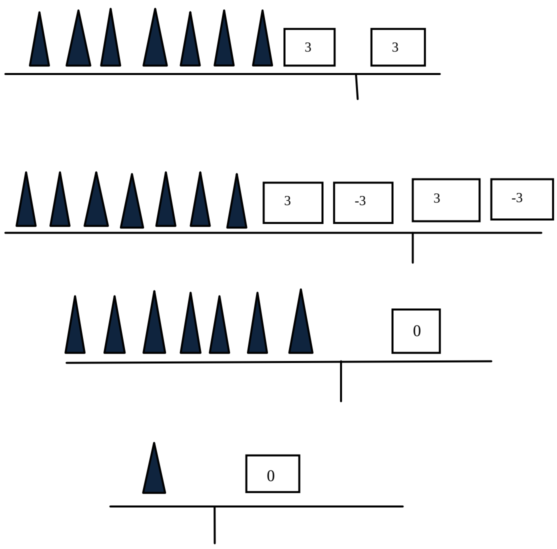
$2/2x = -10/2$

$x = -5$ S = {-5}

Verificação:
2x(-5) – 8 = -18 (?)
-10 – 8 = -18 (?)
-18 = -18 Proposição verdadeira

d) $7x + 3 = 3$

Representação Pictórica:



Representação Algébrica:

$7x + 3 = 3$

Aplicar 1º princípio de equivalência

$7x + 3 + (-3) = 3 + (-3)$

Reduzir termos semelhantes

$7x = 0$

Aplicar 2º princípio de equivalência

$7/7x = 0/7$

$x = 0$ S = {0}

Verificação:

7x0 + 3 = 3 (?)
3 = 3 Proposição verdadeira

Dificuldade: O aluno poderá ter dificuldades em interpretar uma divisão de zero por um número (diferente de zero). Questionar turma: se eu tiver 0 maçãs e quero dividir por 10 pessoas quantas maçãs recebe cada pessoa? O aluno poderá também recorrer à máquina de calcular e verificar que zero dividido por um número (diferente de zero) é zero.

Aprendizagem complementar (TPC, trabalhos escritos, ...)

Avaliação

A avaliação será feita, através, por exemplo:

- Da observação direta (interesse, empenho, sociabilidade);
- Do diálogo com os alunos (qualidade da participação);
- Da realização das tarefas propostas.

Pedagogia diferenciada *

Ter atenção aos registos efetuados por estes alunos. Se necessário dar-lhes outras equações para eles resolverem como complemento da tarefa 1 e em substituição da tarefa 5.
Por exemplo: $5+x=8$; $13= x-7$; $-7+x=-7$

* NEE / estratégias de remediação / planos de recuperação / planos de desenvolvimento

Observações *

Esquema de tempos:

Resumo da aula anterior: 5 min
Exercício 2 (pág.172) :
Exercício 7 (pág. 172):

* Alterações ao plano de aula / notas relevantes

Lição n.º	Data/Hora	Sala	Turma	Docente	Docente de substituição
	23 Abril				

Sumário (no final da aula)

Equações com parêntesis.

Resolução de exercícios. Resolução de problemas.

Tópicos/Subtópicos

Equações com parêntesis

Objetivos específicos

Resolução de equações com parêntesis

Recursos

- Papel e lápis
- Manual
- Materiais hands-on-equations

Capacidades transversais

• Resolução de problemas; • Raciocínio matemático; • Comunicação matemática.

Desenvolvimento da aula

Escrita do sumário (2 min).

No início da aula anteriores a partir de um exemplo dado: $4x + 3 = 2x + 7$, questiono os alunos acerca de todos os conceitos introduzidos nas aulas anteriores:

- Noção de equação.
- Significado de membro e termo.
- Termo independente e termo com incógnita

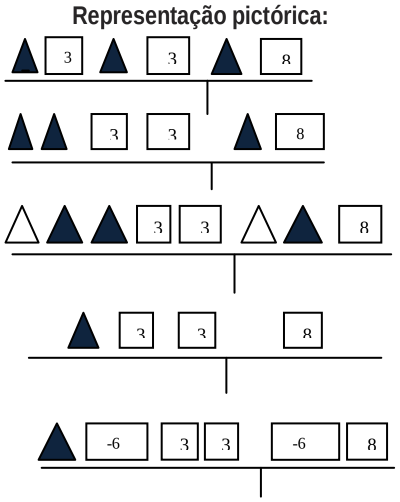
A equação será resolvida no quadro por um aluno (com ajuda coletiva da turma) e serão aplicados e revistos o

- 1º Princípio de equivalência
- 2º Princípio de equivalência
- Redução de termos semelhantes
- Significado de solução da equação

O aluno terá recapitulado os conceitos.

Para explorar a resolução de equações com parênteses parto do seguinte exemplo: $2(x+3) = x + 10$. Pergunto à turma o que é que $2(x+3)$ significa. Poderá haver dúvidas e alunos a responder que é $2x+3$. Coletivamente os alunos deverão chegar à conclusão que o 2 da expressão $2(x+3)$, significa que é 2 vezes o $(x+3)$. Vai ser pedido a uma aluno que represente na balança a equação $2(x+3) = x + 10$. O aluno deverá representar duas vezes o $(x+3)$, do seguinte modo:

Representação pictórica:



Representação algébrica

que também se pode representar da seguinte forma:

$x + 3 + x+ 3 = x + 8$

$2x + 6 = x + 8$

aplicar o 1º princípio de equivalência

$(-x) + 2x + 6 = (-x) + x + 8$

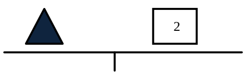
reduzir os termos semelhantes

$x + 6 = 8$

aplicar o 1º princípio de equivalência

$x + (-6) + 6 = x + (-6) + 8$

reduzir os termos semelhantes



$x = 2$

$S = \{2\}$

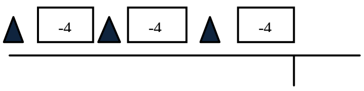
escrever o conjunto solução.

Na representação pictórica, verifica-se que $2(x+3) = x+3 + x+3$, que por sua vez, reduzindo os termos semelhantes, será igual a $2x + 6$. O aluno deverá perceber que $2(x+3)$ representa duas vezes o $x+3$, isto é, duas vezes o x mais duas vezes o 3, dando origem a que o aluno perceba que $2(x+3) = 2x + 6$.

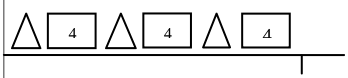
$$2(x+3) = 2x + 2x3 = 2x + 6$$

Colocar à turma um novo exemplo para perceber se os alunos perceberam realmente esta propriedade.

Resolução do Exercício 2, **alíneas a), b) e c)** (pág. 175)
Com a resolução deste exercício pretendo que o aluno consolide tanto a questão de resolver equações e equações com parênteses, como a determinação do conjunto solução e sua verificação. Todas as equações serão representadas na balança por um aluno, e paralelamente um outro aluno deverá representar pictoricamente e algebricamente no quadro a resolução da equação. Também será feita a verificação da solução encontrada.
Além disso, este exercício recorre à soma e multiplicação de inteiros, onde são válidas as regras dos sinais. O aluno deverá recordar estas propriedades e saber aplicá-las.
Caso o aluno tenha dificuldades, na alínea a) a resolver $2(x-1)$, deverá escrever $2(x-1)$ na forma $(x-1) + (x-1) = x - 1 + x – 1 =$ $= 2x – 2$ verificando a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição. Na alínea c) surge a equação $5x -3(x-4) =$ $= x + 10$. Poderá surgir a dificuldade de o aluno explicar a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição com números negativos. Aqui deverão recorrer às regras dos sinais. Uma estratégia para resolver $-3 (x - 4)$, será resolver com o apoio da balança. Sabendo que $3 (x – 4)$ se representa



então, $-3(x-4)$ será o simétrico do anterior:



Que se representará por: $-3x + 12$.

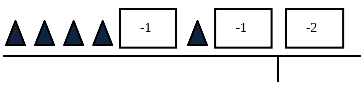
A partir desta exploração o aluno não deverá ter dificuldades em resolver a alínea c) $5x – 3(x-4) = x - 10$

Ex.2

a) $3x + 2(x-1) = -2$

Representação pictórica:

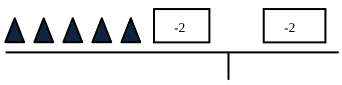
Representação algébrica:



$3x + x-1 + x-1 = -2$

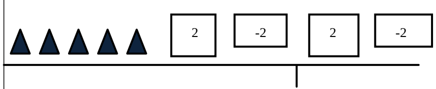
Com o auxílio da balança, ou por aplicar a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição, o aluno chegará à equação (equivalente) $3x + 2x + (-2) = -2$

reduzir os termos semelhantes



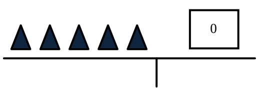
$5x – 2 = -2$

aplicar o 1º princípio de equivalência



$5x + 2 + (-2) = 2 + (-2)$

reduzir os termos semelhantes



$5x = 0$

aplicar o 2º princípio de equivalência

$5/5x = 0/5$

$x = 0$

$S = \{0\}$

O aluno deverá proceder à verificação:

Substituir o valor encontrado na equação inicial:

$3 \times 0 + 2(0-1) = -2$

$-2 = -2$ Proposição verdadeira

Dificuldades:
O aluno poderá ter dificuldades em entender o significado do 0 do segundo membro, e que podemos aplicar o 2º princípio de equivalência e dividir o 0 por 5 (coeficiente da incógnita, isto é, o número de vezes que incógnita ocorre), sendo este resultado 0. Questionar a turma com esta situação: que número multiplicado por 5 dá 0? E qual um número multiplicado por 1000 dá 0? O aluno deverá chegar à conclusão que esse número só poderá ser 0. Deste modo obtemos a solução da equação: 0 que o aluno deverá escrever no quadro e sua verificação. Esclarecer que a solução da equação é 0 e não o valor que torna a proposição verdadeira (neste caso o -2).

b) $3(x + 2) = 2x + 3$

O aluno deve compreender que $3(x + 2)$ significa que $x + 2$ ocorre 3 vezes, isto é,

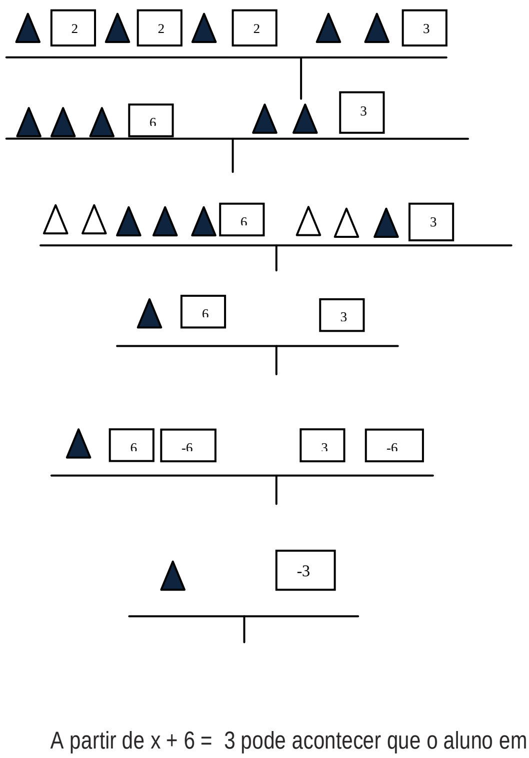
$3(x + 2) = x + 2 + x + 2 + x + 2 = 3x + 6$

(isto irá ser representado na balança por um aluno, de modo a que os colegas percebam o que representa a quantidade $3(x + 2)$).

O aluno pode também, aplicar a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição:

$3(x + 2) = 3x + 3x2 = 3x + 6$

Representação pictórica:



Representação algébrica:

$x + 2 + x + 2 + x + 2 = 2x + 3$

reduzir os termos semelhantes

$3x + 6 = 2x + 3$

aplicar o 1º princípio de equivalência

$((-x) + (-x) + 3x + 6 = (-x) + (-x) + 2x + 3$

reduzir os termos semelhantes

$x + 6 = 3$

aplicar o 1º princípio de equivalência

$x + 6 + (-6) = 3 + (-6)$

reduzir os termos semelhantes

$x = -3$

A partir de $x + 6 = 3$ pode acontecer que o aluno em vez de somar o (-6) a ambos os membros some (-3) dando origem à seguinte equação (equivalente) : $x + 6 + (-3) = 3 + (-3)$, anulando o 2º membro: $x + 3 = 0$, e a partir daqui somar (-3) a ambos os membros para isolar x: $x + 3 + (-3) = 0 + (-3)$, obtendo portanto, $x = -3$. Esta resolução também está correta, pois o aluno aplica o 1º princípio de equivalência corretamente. Tudo o que o aluno propõe somar ou subtrair a ambos os membros, é a mesma quantidade, mantendo-se a igualdade entre os dois membros.

c) $5x - 3(x - 4) = x - 10$

A maior dificuldade que poderá surgir neste exercício será entender o que significa -3 (x - 4). Abrindo a questão à turma, questiono o que representa 3 (x – 4) ? Os alunos não deverão ter dificuldades em perceber que 3 (x – 4) significa que x – 4 se repete 3 vezes, isto é;

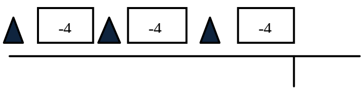
$3(x - 4) = (x - 4) + (x - 4) + (x - 4) = x + x + x + (-4) + (-4) + (-4) = 3x - 12$

Aplicando diretamente a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição, obtemos:

$$3(x - 4) = 3x + 3x(-4) = 3x + (-12) = 3x - 12$$

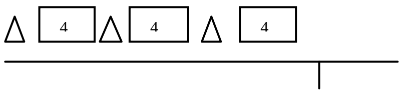
O aluno deve aperceber-se que quando multiplicamos o 3 por (-4) iremos obter um número negativo pois $3x(-4) = -4 + (-4) + (-4) = -12$

Um erro que pode ocorrer é o aluno escrever que $3(x - 4) = 3x - 4$. Este aluno ainda não percebeu a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição. Para resolver esta dúvida proponho que o aluno represente na balança 3 vezes a quantidade (x – 4) e verificar o que obtém:



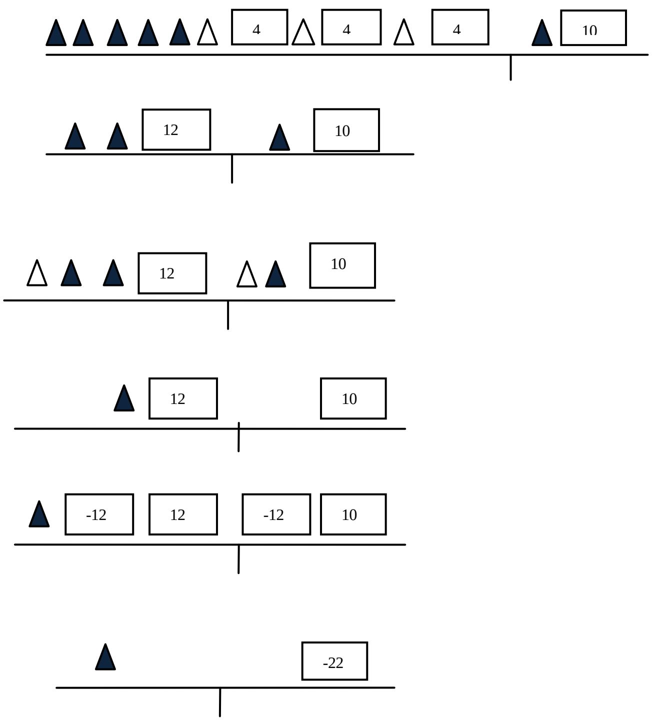
Deste modo o aluno visualiza fisicamente o que significa 3(x – 4) e facilmente chega à conclusão que $3(x - 4) = x - 4 + x - 4 + x - 4 = 3x - 12$.

Agora o passo seguinte será explorar o que significa -3(x – 4). Questionar a turma: o que difere de 3(x – 4) de -3(x – 4)? Coletivamente os alunos chegarão à conclusão de que são simétricos. Ou seja podemos representar na balança -3(x – 4) como sendo o simétrico de 3(x – 4), do seguinte modo:



Agora resolve-se a equação dada: $5x - 3(x - 4) = x - 10$

Representação pictórica:



Representação algébrica:

$5x - x + 4 - x + 4 - x + 4 = x - 10$

reduzir termos semelhantes

$2x + 12 = x - 10$

Aplicar o 1º princípio de equivalência

$(-x) + 2x + 12 = (-x) + x - 10$

reduzir termos semelhantes

$x + 12 = -10$

Aplicar o 1º princípio de equivalência

$x + (-12) + 12 = (-12) - 10$

reduzir termos semelhantes

$x = -22$

Problema 1 (pág. 175)

A escolha deste problema deve-se ao facto de ser bastante abrangente. A alínea a) é uma maneira de os alunos procederem à passagem da linguagem corrente para a linguagem matemática, importantíssimo para o estudo das equações. As alíneas b) e c) recorrem à geometria e é uma ótima maneira de explorar as noções de perímetro e área de uma figura plana aplicados a problemas com equações.

Qualquer um destes problemas, após uns minutos de trabalho autónomo, vai ser resolvido um conjunto e discutido por toda a turma. Ao iniciar a problema leio o enunciado à turma e questiono se há alguma dúvida relativamente ao mesmo. Peço um voluntário que explique à turma o que se pretende com cada problema. Sempre que haja alguma dúvida peço a um aluno para explicar à turma.

a) O triplo da diferença entre um número e 5 é 10. Qual é esse número?

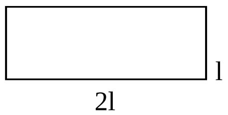
Caso ao aluno não perceba o que se pretende, isto é não consiga traduzir a linguagem corrente para a linguagem matemática, vamos por partes:

Primeiro explorar o que é a diferença entre dois números. Isto é, a diferença entre um número e 5 será x-5. O aluno deve compreender que a diferença entre dois números será a subtração do segundo ao primeiro. Caso o aluno não perceba o que é a diferença entre dois números, dou um exemplo: se a Maria tem 10 anos e o Manuel tem 6 anos, qual é a diferença de idades entre eles? A resposta intuitiva será 4. Que se traduz na subtração de um número pelo outro, isto é, 10 – 6 = 4.

O passo seguinte será explorar o que é o triplo de determinada quantidade, ou seja, que o triplo significa 3 vezes essa quantidade. Posto isto o aluno já saberá resolver este problema expresso pela equação 3(x-5) = 10, ou seja, o triplo da quantidade que se pretende (que neste caso é a diferença entre um número e 5: x – 5) se representa por 3(x – 5). Como se pretende que o triplo desta diferença seja 10, escreve-se 3(x – 5) = 10.

O aluno poderá resolver este problema pictoricamente ou algebricamente. Caso haja dúvidas na turma, um aluno irá resolver o problema com o auxilio das balanças. A sua solução é 25/3. Este problema é uma oportunidade de o aluno trabalhar com equações com parênteses.

b) A medida do perímetro do retângulo da figura é 12 cm. Quanto mede cada lado?



Na resolução espera-se que o aluno saiba que é o perímetro de um retângulo. Senão, questionar à turma: O que é o perímetro de um retângulo? Após discussão coletiva, chega-se à conclusão que o perímetro de um retângulo é soma das medidas dos seus quatro lados.

Pretende-se que o aluno consiga passar da linguagem corrente (do enunciado) para a linguagem matemática, e conseguir expressar numa equação o que é pedido. Ou seja, por hipótese o perímetro é 12 cm, e o retângulo tem l cm de largura e 2l cm de comprimento. Sabendo que o perímetro de um retângulo é a soma dos seus 4 lados, então P = l + 2l + l + 2l.

Por hipótese P = 12, então,

P = l + 2l + l + 2l = 12

A este ponto é expectável que o aluno saiba que deve resolver a equação:

l + 2l + l + 2l = 12

reduzir os termos semelhantes

6l = 12

Aplicar 2º princípio de equivalência

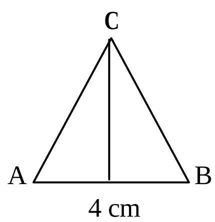
6/6l = 12/6

l = 2

É importante fazer ver ao aluno que a solução da equação é 2, mas que a resposta ao problema será que os lados do retângulo medem 2cm e 4 cm. Evidenciar a diferença da solução da equação e da solução do problema. O aluno poderá ainda não fazer a distinção.

Na resolução desta equação pretende-se que o aluno saiba reduzir termos semelhantes e aplicar o 2º princípio de equivalência

a) A área do triângulo [ABC] é 5 cm2. Qual a medida do comprimento da altura desenhada no triângulo abaixo?



Para resolver este problema o aluno já deverá saber como se calcula a área de um triângulo. Caso o aluno não saiba calcular a área do triângulo, abrir a questão à turma. Após discussão coletiva, chegar à conclusão que a área de um triângulo é dada por A = bxh/2, em que b representa a base e h a altura.

Neste ponto pretende-se que o aluno consiga passar da linguagem corrente (do enunciado) para a linguagem matemática. Isto é saber que a área do triângulo é 5cm2, é o mesmo que dizer que bxh/2 = 5. Sabendo que a base mede 4 cm, substituir:

A = 4xh/2 = 5

Aqui poderá surgir dúvidas quanto ao aplicar o 2º princípio de equivalência, pois nos casos anteriores só foi utilizada a divisão de ambos os membros por uma quantidade diferente de zero. Neste exemplo particular, é necessário multiplicar ambos os membros por 2 (quantidade diferente de zero). Será a 1ª vez que o aluno se depara com esta situação, o que poderá levantar dúvidas. Colocar um exemplo prático. Por exemplo: Se eu tiver uma determinada quantidade de maçãs e dividir por nós os dois, ficamos com 5 maçãs cada. Quantas maçãs tenho eu? Intuitivamente o aluno percebe que tenho inicialmente 10 maçãs, ie, aplicam o 2º princípio de equivalência.

O aluno resolvendo então a equação bxh/2 = 5 ⇔ 4xh/2 = 5 — 2º princípio de equivalência.
⇔ 4xh = 5x2
⇔ 4h = 10 — 2º princípio de equivalência.
⇔ 4/4 h = 10/4
⇔ h = 2,5 cm

obtém a solução da equação e do problema, ou seja o comprimento da altura do triângulo é 2,5 cm.

Aprendizagem complementar (TPC, trabalhos escritos, …)

• Resolução dos problemas 2 e 3 (pág. 175)

Avaliação

A avaliação será feita, através, por exemplo:
• Da observação direta (interesse, empenho, sociabilidade);
• Do diálogo com os alunos (qualidade da participação);
• Da realização das tarefas propostas.

Pedagogia diferenciada *

ações *

Esquema de tempos:

Síntese das aulas anteriores: 10 min
Introdução às equações com parênteses: 25 min
Exercícios: 25 min
Problemas: 25 min

* Alterações ao plano de aula / notas relevantes

Lição n.º	Data/Hora	Sala	Turma	Docente	Docente de substituição
	24 Abril 2012				

Sumário (no final da aula)

Resolução de exercícios sobre equações.
Resolução de problemas.

Tópicos/Subtópicos

Resolução de equações de 1º grau

Objetivos específicos

- Resolver equações do 1.º grau
- Resolver equações do 1.º grau com parênteses
- Resolver problemas envolvendo equações de 1º grau.

Recursos

- Papel e lápis
- Manual
- Material Hands-on-equations

Capacidades transversais

• Resolução de problemas; • Raciocínio matemático; • Comunicação matemática.

Desenvolvimento da aula

Escrita do sumário (2 min).

No início da aula, a partir do exemplo do primeiro exercício: $2x - 3(4 - x) = 5 + 4(2x + 1)$, serão relembrados os conceitos introduzidos nas aulas anteriores (10 min):

- Noção de equação.
- Significado de membro e termo.
- Significado de incógnita e solução da equação
- 1º Princípio de equivalência
- 2º Princípio de equivalência
- Redução de termos semelhantes
- Equações com parêntesis

Esta aula servirá de consolidação dos conceitos aprendidos nas aulas passadas.

Serão propostos os seguintes exercícios e problemas: **Ex. 4 a) e c)** (pág. 179); **Problema 1, a), b) e c)** (pág. 175) **Problema 3** (pág. 178); **Problema. 2 e 4** (pág. 178). Todas estas questões foram escolhidas de forma a que o aluno aplique o 1º e 2º princípio de equivalência, reduza termos semelhantes e resolva equações com parênteses. Em qualquer uma das equações espera-se que o aluno faça a verificação da solução.

O **Ex.4 (pág. 179)** foi escolhido para que o aluno consolide a resolução de equações de 1º grau com parênteses, fazendo uma revisão da aula passada. A equação será representada na balança por um aluno. Outro aluno fará a representação pictórica e algébrica no quadro.

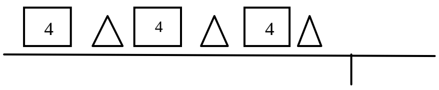
Dificuldades: O aluno poderá ter dificuldades em desembaraçar de parênteses. Questionar turma sobre o que fazer. Pode surgir a ideia de usar a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição. Haverá alunos que estejam familiarizados com esta propriedade, como haverá alunos com dúvidas. Para ultrapassar esta dificuldade proponho a um aluno que represente a equação na balança.

a) $\mathbf{2x - 3(4-x) = 5 + 4(2x + 1)}$

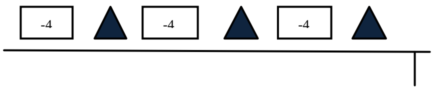
Dificuldades: O aluno poderá ter dificuldades em interpretar o que significa $-3(4 - x)$. Um erro que pode ocorrer, (entre outros), é o aluno escrever que $-3(4-x) = -7 - x$. Este aluno ainda não percebeu a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição que se aplica da seguinte forma:

$$\mathbf{-3(4 - x) = -3 \times 4 + (-3 \times (-x)) = -12 + 3x}$$

. Para esclarecer os alunos esta propriedade proponho que o aluno represente na balança 3 vezes a quantidade $(4 - x)$ e verificar o que se obtém:



Agora o passo seguinte será explorar o que significa -3(4 - x). Questionar a turma: o que difere de 3(4 – x) de -3(4 - x)? Coletivamente os alunos chegarão à conclusão de que são simétricos. Ou seja podemos representar na balança -3(4 - x) como sendo o simétrico de 3(4 - x), do seguinte modo:



Observamos então que $-3(4 – x) = -12 + 3x$.

No 2º membro da equação surge a expressão $4(2x + 1)$. O aluno pode desembaraçar de parênteses aplicando a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição:

$$4(2x + 1) = 8x + 4$$

No caso de dúvida propor a um aluno que represente $4 (2x + 1)$ na balança, do seguinte modo: representar 4 vezes a expressão $2x + 1$:

Somando os termos semelhantes obtemos:

$$8x + 4$$

Escolher um aluno para ir representar a equação na balança. Uma vez não havendo pins e dados suficientes pode-se sempre utilizar os pins e os dados pequenos dos kits.

O aluno representará esta equação pictoricamente. Paralelamente à: **Representação algébrica:**

$2x – 3(4 – x) = 5 + 4(2x + 1)$	desembaraçar os parênteses
⇔ $2x – 12 + 3x = 5 + 8x + 4$	reduzir termos semelhantes
⇔ $5x – 12 = 8x + 9$	aplicar 1º princípio de equivalência
⇔ $5x + (-8x) – 12 = 8x + (-8x) + 9$	reduzir termos semelhantes
⇔ $-3x – 12 = 9$	aplicar 1º princípio de equivalência
⇔ $-3x – 12 + 12 = 9 + 12$	reduzir termos semelhantes
⇔ $-3x = 21$	aplicar 2º princípio de equivalência
⇔ $-3/-3x = 21/-3$	escrever solução
⇔ $x = -7$	

Poderá haver alunos que resolvam a equação isolando a incógnita do lado direito:

A partir de

2x – 3(4 – x) = 5 + 4(2x + 1) ⇔
⇔2x – 12 + 3x = 5 + 8x + 4 ⇔
⇔5x – 12 = 8x + 9⇔

Aplicar o 1º princípio de equivalência do seguinte modo:

⇔ 5x + (-5x) – 12 = 8x + (-5x) + 9 ⇔
⇔ -12 = 3x + 9 ⇔

Aplicando novamente o 1º princípio de equivalência, obtemos

⇔ -12 + (-9) = 3x + 9 + (-9) ⇔
⇔ -21 = 3x ⇔

Aplicando o 2º princípio de equivalência,

⇔ -21/3 = 3/3 x ⇔
⇔ -7 = x

Nota: verificar sempre a representação pictórica.

c) 5 – 3(1 – 2x) = 3x – 13

Nesta questão põe-se de novo a dúvida de quanto é -3(1-2x). Uma opção a tomar será aplicar diretamente a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição:

-3 (1 – 2x) = -3 x 1 – 3 x (-2x) = -3 + 6x.

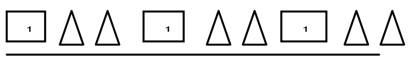
O aluno poderá também resolver do seguinte modo:

Se 3 (1 – 2x) = (1 – 2x) + (1 – 2x) + (1 - 2x) = 1 – 2x + 1 – 2x + 1 - 2x = 3 – 6x.

Então o seu simétrico: -3 (1 – 2x) será -3 + 6x.

Pictoricamente:

Se 3 (1 – 2x) = 3 – 6x

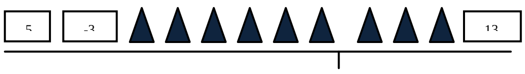


Portanto, -3(1 – 2x) = -3 + 6x

Passando esta dificuldade, o aluno será capaz de resolver a equação:

5 – 3(1 – 2x) = 3x – 13

Representação pictórica:



(Um aluno deverá fazer a representação pictórica paralelamente à representação na balança por outro aluno).

Representação algébrica:

5 – 3 + 6x = 3x – 13 — aplicar 1º princípio de equivalência

5 – 3 + 6x + (-3x) = 3x + (-3x) -13 — reduzir termos semelhantes

2 + 3x = -13 — aplicar 1º princípio de no quadro, equivalência

2+ (-2) + 3x = -13 + (-2) — reduzir termos semelhantes

3x = -15 — aplicar 2º princípio de equivalência

3/3x = -15/3 — escrever solução

x = -5

Problema 1 (pág. 175)

A escolha deste problema deve-se ao facto de ser bastante abrangente. A alínea a) é uma maneira de os alunos procederem à passagem da linguagem corrente para a linguagem matemática, importantíssimo para o estudo das equações. As alíneas b) e c) recorrem à geometria e é uma ótima maneira de explorar as noções de perímetro e área de uma figura plana aplicados a problemas com equações.

Qualquer um destes problemas, após uns minutos de trabalho autónomo, vai ser resolvido um conjunto e discutido por toda a turma. Ao iniciar a problema leio o enunciado à turma e questiono se há alguma dúvida relativamente ao mesmo. Peço um voluntário que explique à turma o que se pretende com cada problema. Sempre que haja alguma dúvida peço a um aluno para explicar à turma.

a) **O triplo da diferença entre um número e 5 é 10. Qual é esse número?**

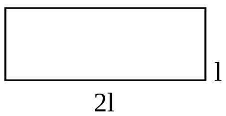
Caso o aluno não perceba o que se pretende, isto é, não consiga traduzir a linguagem corrente para a linguagem matemática, vamos por partes:

Primeiro explorar o que é a diferença entre dois números. Isto é, a diferença entre um número e 5 será x-5. O aluno deve compreender que a diferença entre dois números será a subtração do segundo ao primeiro. Caso o aluno não perceba o que é a diferença entre dois números, dou um exemplo: se a Maria tem 10 anos e o Manuel tem 6 anos, qual é a diferença de idades entre eles? A resposta intuitiva será 4. Que se traduz na subtração de um número pelo outro, isto é, $10 – 6 = 4$.

O passo seguinte será explorar o que é o triplo de determinada quantidade, ou seja, que o triplo significa 3 vezes essa quantidade. Posto isto o aluno já saberá resolver este problema expresso pela equação $3(x-5) = 10$, ou seja, o triplo da quantidade que se pretende (que neste caso é a diferença entre um número e 5: $x – 5$) se representa por $3(x – 5)$. Como se pretende que o triplo desta diferença seja 10, escreve-se $3(x – 5) = 10$.

O aluno poderá resolver este problema pictoricamente ou algebricamente. Caso haja dúvidas na turma, um aluno irá resolver o problema com o auxilio das balanças. A sua solução é 25/3. Este problema é uma oportunidade de o aluno trabalhar com equações com parênteses.

a) **A medida do perímetro do retângulo da figura é 12 cm. Quanto mede cada lado?**



Na resolução espera-se que o aluno saiba que é o perímetro de um retângulo. Senão, questionar à turma: O que é o perímetro de um retângulo? Após discussão coletiva, chega-se à conclusão que o perímetro de um retângulo é soma das medidas dos seus quatro lados.

Pretende-se que o aluno consiga passar da linguagem corrente (do enunciado) para a linguagem matemática, e conseguir expressar numa equação o que é pedido. Ou seja, por hipótese o perímetro é 12 cm, e o retângulo tem l cm de largura e 2l cm de comprimento. Sabendo que o perímetro de um retângulo é a soma dos seus 4 lados, então $P = l + 2l + l + 2l$.

Por hipótese $P = 12$, então,

$$P = l + 2l + l + 2l = 12$$

A este ponto é expectável que o aluno saiba que deve resolver a equação:

$l + 2l + l + 2l = 12$ — reduzir os termos semelhantes

$6l = 12$ — Aplicar 2º princípio de equivalência

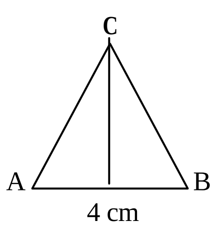
$6/6l = 12/6$

$l = 2$

É importante fazer ver ao aluno que a solução da equação é 2, mas que a resposta ao problema será que os lados do retângulo medem 2cm e 4 cm. Evidenciar a diferença da solução da equação e da solução do problema. O aluno poderá ainda não fazer a distinção.

Na resolução desta equação pretende-se que o aluno saiba reduzir termos semelhantes e aplicar o 2º princípio de equivalência

a) **A área do triângulo [ABC] é 5 cm2. Qual a medida do comprimento da altura desenhada no triângulo abaixo?**



Para resolver este problema o aluno já deverá saber como se calcula a área de um triângulo. Caso o aluno não saiba calcular a área do triângulo, abrir a questão à turma. Após discussão coletiva, chegar à conclusão que a área de um triângulo é dada por A = bxh/2, em que b representa a base e h a altura.
Neste ponto pretende-se que o aluno consiga passar da linguagem corrente (do enunciado) para a linguagem matemática. Isto é saber que a área do triângulo é 5cm2, é o mesmo que dizer que bxh/2 = 5. Sabendo que a base mede 4 cm, substituir:

A = 4xh/2 = 5

Aqui poderá surgir dúvidas quanto ao aplicar o 2º princípio de equivalência, pois nos casos anteriores só foi utilizada a divisão de ambos os membros por uma quantidade diferente de zero. Neste exemplo particular, é necessário multiplicar ambos os membros por 2 (quantidade diferente de zero). Será a 1ª vez que o aluno se depara com esta situação, o que poderá levantar dúvidas. Colocar um exemplo prático. Por exemplo: Se eu tiver uma determinada quantidade de maçãs e dividir por nós os dois, ficamos com 5 maçãs cada. Quantas maçãs tenho eu? Intuitivamente o aluno percebe que tenho inicialmente 10 maçãs, ie, aplicam o 2º princípio de equivalência.

O aluno resolvendo então a equação bxh/2 = 5 ⇔ 4xh/2 = 5 — 2º princípio de equivalência.
⇔ 4xh = 5x2
⇔ 4h = 10 — 2º princípio de equivalência.
⇔ 4/4 h = 10/4
⇔ h = 2,5 cm

obtém a solução da equação e do problema, ou seja o comprimento da altura do triângulo é 2,5 cm.

Problema 3 (pág.178)

Dificuldades: o aluno poderá ter dúvidas de como representar dois números pares consecutivos. Pode começar por supor que o primeiro número natural par é representado por n, e por consequência, o número par seguinte será o n+2. Assim, o aluno resolve a seguinte equação: n + n + 2 = 46 ⇔ 2n + 2 + (-2) = 46 + (-2) ⇔ 2n = 44 ⇔ 2/2n = 44/2 ⇔ n = 22. A resposta esperada será portanto os números são 22 e 24.
Por outro lado, o aluno pode apresentar outra estratégia. Para garantir que um número natural é par, será da forma 2n.
Assim, neste caso, o número par consecutivo será 2n+2. Deste modo, o aluno resolve a equação 2n+2n+2=46 ⇔ 4n + 2 +(-2) = 46 + (-2) ⇔ 4n = 44 ⇔ 4/4n=44/4 ⇔ n=11. A resposta esperada é n=11, logo 2n = 22 e 2n+2=24

Problema 2 (pág.178)

Dificuldades: O aluno deve saber o que significa o que é um triângulo equilátero, isto é, um triângulo com todos os lados iguais. Para que este triângulo seja equilátero as medidas dos lados terão de ser iguais, isto é, 4x+3=4x+3 (Verifica-se) e 4x + 3 = 2 (2x + 4) – 5 ⇔ 4x + 3 = 4x + 8 – 5 ⇔ 4x + 3 = 4x + 3 Proposição verdadeira. Conclui-se que o triângulo tem todos os lados iguais, isto é, o triângulo é equilátero.

Problema 4 (pág. 178)

Dificuldades:

Neste problema o aluno poderá ter dificuldades em traduzir de linguagem corrente para linguagem matemática. Quando no enunciado diz que o número de raparigas excede em 5 o número de rapazes, e se, x representar o número de raparigas e y representar o número de rapazes, então, x = y + 5.

Se saíram 3 raparigas ficamos então com x - 3, ou, y + 5 – 3 raparigas. Então, ao todo e sabendo que ficaram 14 pessoas na festa concluímos que o número de raparigas que ficaram mais o número de rapazes é dado por y + 5 – 3 + y = 14 ⇔
⇔ 2y + 2 = 14 ⇔ 2y + (-2) = 14 + (-2) ⇔ 2y = 12 ⇔ 2/2y = 12/2 ⇔ y = 6.

Resposta esperada 6 rapazes e 11 raparigas.

NOTA: Para resolver qualquer um destes problemas o aluno poderá e deverá recorrer à balança, e escrever a representação pictórica e a representação algébrica da resolução das equações.

Aprendizagem complementar (TPC, trabalhos escritos, …)

• Caso haja problemas que não foram resolvidos na aula, ficarão para trabalho de casa.

Avaliação

A avaliação será feita, através, por exemplo:

• Da observação direta (interesse, empenho, sociabilidade);

• Do diálogo com os alunos (qualidade da participação);

• Da realização das tarefas propostas.

Pedagogia diferenciada *

Observações *

Esquema de tempos:

Síntese das aulas anteriores: 10 min
Exercícios 4): 15 min
Problemas: 60 min
Síntese da aula: 5 min.

* Alterações ao plano de aula / notas relevantes

				Docente	D
	30 Abril				

Sumário (no final da au

Resolução de problemas.

Tópicos/Subtópicos

Resolução de equações de 1º grau

Objetivos específicos

- Resolver equações do 1.º grau
- Resolver problemas envolvendo equações de 1º grau.

- Papel e lápis
- Manual

Capacidades transversais

• Resolução de problemas; • Raciocínio matemático; • Comunicação matemática.

Desenvolvimento da aula

Escrita do sumário (2 min).
Fazer uma pequena revisão dos conceitos dados nas aulas anteriores. .Esta revisão poderá ser feita a partir de um exemplo no decorrer da aula.

Esta aula servirá para o consolidar a resolução de equações a partir de resolução de problemas.
Serão propostos os **Problemas 3 e 5** (pág. 178), e os **Problemas 1, 2 e 4** (pág. 178).

Problema 3 (pág. 178)
Dificuldades: o aluno poderá ter dúvidas de como representar dois números pares consecutivos. Pode começar por supor que o primeiro número natural par é representado por n, e por consequência, o número par seguinte será o n+2. Assim, o aluno resolve a seguinte equação: $n + (n + 2) = 46 \Leftrightarrow 2n + 2 + (-2) = 46 + (-2) \Leftrightarrow 2n = 44 \Leftrightarrow 2/2n = 44/2 \Leftrightarrow n = 22$. A resposta esperada será portanto os números são 22 e 24.
Por outro lado, o aluno pode apresentar outra estratégia. Para garantir que um número natural é par, será da forma 2n será da forma 2n. Assim, neste caso, o número par consecutivo será 2n+2. Deste modo, o aluno resolve a equação $2n+2n+2=46 \Leftrightarrow 4n + 2 +(-2) = 46 + (-2) \Leftrightarrow 4n = 44 \Leftrightarrow 4/4n=44/4 \Leftrightarrow n=11$. A resposta esperada é n=11, logo 2n = 22 e 2n+2=24.

Problema 5 (pág.178)
Este exercício foi escolhido de modo a que o aluno lide com problemas que são impossíveis; isto é, existe solução da equação mas não do problema. Pretende-se que o aluno dê significado ao resultado a que chegou.
Dificuldades: Na resolução espera-se que o aluno saiba que é o perímetro de um retângulo. Senão, questionar à turma: O que é o perímetro de um retângulo? Após discussão coletiva, chega-se à conclusão que o perímetro de um retângulo é soma das medidas dos seus quatro lados.
Pretende-se que o aluno consiga passar da linguagem corrente (do enunciado) para a linguagem matemática, e conseguir expressar numa equação o que é pedido. Ou seja, por hipótese o retângulo tem (x + 20) cm de comprimento e (x + 3) cm de largura. Portanto o seu perímetro será dado por:

$$P= (x + 20) + (x + 3) + (x + 20) + (x + 3) = x + 20 + x + 3 + x + 20 + x + 3$$

Por hipótese o perímetro do retângulo é 40 cm. Então pretende-se resolver a equação:

$$x + 20 + x + 3 + x + 20 + x + 3 = 40$$

O aluno ainda poderá recorrer à balança ou representação pictórica. Paralelamente deverá fazer a representação algébrica:

$x + 20 + x + 3 + x + 20 + x + 3 = 40 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4x + 46 = 40 \Leftrightarrow$ — reduzir termos semelhantes

$\Leftrightarrow 4x + 46 + (-46) = 40 + (-46) \Leftrightarrow$ — aplicar 1º princípio de equivalência

$\Leftrightarrow 4x = -6 \Leftrightarrow$ — reduzir termos semelhantes

$\Leftrightarrow 4/4x = -6/4 \Leftrightarrow$ — aplicar 2º princípio de equivalência

$\Leftrightarrow x = -3/2$ — escrever solução.

De notar que a equação tem solução: -3/2, no entanto o problema não tem solução pois <u>não existem medidas negativas</u>. Fazer ver ao aluno que **a solução da equação poderá não ser a solução do problema**.

Problema 1 (pág.178)

Dificuldades: Caso algum aluno tenha dificuldades em compreender o enunciado, é pedido à turma a sua interpretação. Sabemos que a idade do André é o triplo da do Bernardo, isto é, sendo A a idade do André, e B a idade do Bernardo, então, A=3B. O enunciado também nos diz que o Bernardo tem menos doze anos que o André. Como escrevo isto? Coloco a questão à turma. O aluno chegará à conclusão que isto significa que B=A-12. Assim, já podemos resolver a equação:

Se $A = 3B$
e $B = A – 12$,
substituindo,

$B = 3B - 12 \Leftrightarrow B + (-B) = 3B + (-B) – 12$
$\Leftrightarrow 0 = 2B - 12$
$\Leftrightarrow 12 = 2B – 12 + 12$
$\Leftrightarrow 12 = 2B$
$\Leftrightarrow 12/2 = 2/2B$
$\Leftrightarrow 6 = B$

Resposta: O Bernardo tem 6 anos, e o André tem 18 anos.

Problema 2 (pág.178)

Dificuldades: O aluno deve saber o que significa o que é um triângulo equilátero, isto é, um triângulo com todos os lados iguais. Para que este triângulo seja equilátero as medidas dos lados terão de ser iguais, isto é, $4x+3=4x+3$ (Verifica-se) e $4x + 3 = 2 (2x + 4) – 5 \Leftrightarrow 4x + 3 = 4x + 8 – 5 \Leftrightarrow 4x + 3 = 4x + 3$ Proposição verdadeira. Conclui-se que o triângulo tem todos os lados iguais, isto é, o triângulo é equilátero.

Problema 4 (pág. 178)

Este problema foi escolhido de modo que os alunos trabalhem com equações com parênteses e lhes deêm significado.

Dificuldades:

Neste problema o aluno poderá ter dificuldades em traduzir de linguagem corrente para linguagem matemática. Quando no enunciado diz que o número de raparigas excede em 5 o número de rapazes, e se, x representar o número de raparigas e y representar o número de rapazes, então, $x = y + 5$, ou seja,

Nº de rapazes: y
Nº de raparigas: $x = y + 5$

Se saíram 3 raparigas ficamos então com x - 3, ou, (y + 5) – 3 raparigas. Então, ao todo e sabendo que ficaram 14 pessoas na festa concluímos que o número de raparigas que ficaram mais o número de rapazes é dado por:

$(y + 5) – 3 + y = 14 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow y + 5 – 3 + y = 14 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 2y + 2 = 14 \Leftrightarrow 2y + (-2) = 14 + (-2) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 2y = 12 \Leftrightarrow 2/2y = 12/2 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow y = 6.$

Resposta esperada 6 rapazes e 11 raparigas

Aprendizagem complementar (TPC, trabalhos escritos, …)

• Resolução dos problemas 8, 9 e 10 (pág. 179)

Avaliação

A avaliação será feita, através, por exemplo:

• Da observação direta (interesse, empenho, sociabilidade);

• Do diálogo com os alunos (qualidade da participação);

• Da realização das tarefas propostas.

Pedagogia diferenciada

Observações *

Esquema de tempos:

Síntese das aulas anteriores: 5 min
Resolução de Problemas: 80 min
Síntese da aula: 5 min

* Alterações ao plano de aula / notas relevantes

				Docente	D
	03 Maio				

Sumário (no final da au

Classificação de equações.
Resolução de problemas.

Tópicos/Subtópicos

Resolução de equações de 1º grau

Objetivos específicos

- Resolver equações do 1.º grau
- Classificar equações de 1º grau
- Resolver problemas envolvendo equações de 1º grau.

- Papel e lápis
- Manual

Capacidades transversais

• Resolução de problemas; • Raciocínio matemático; • Comunicação matemática.

Desenvolvimento da aula

Escrita do sumário (2 min).
Fazer uma pequena revisão dos conceitos dados nas aulas anteriores. Esta revisão poderá ser feita a partir de um exemplo no decorrer da aula.

Esta aula servirá para resolver problemas usando equações. Será também introduzida a classificação de equações.
Prevê-se a resolução do **Problema 4** (pág. 178), o **Exercício 7** (pág. 179), e os **Problemas 8, 9 e 10** (pág. 179).

Problema 4 (pág. 178)
Este problema foi escolhido de modo que os alunos trabalhem com equações com parênteses e lhes deêm significado.
Dificuldades:
Neste problema o aluno poderá ter dificuldades em traduzir de linguagem corrente para linguagem matemática. Quando no enunciado diz que o número de raparigas excede em 5 o número de rapazes então,

Nº de rapazes: y
Nº de raparigas: $y + 5$

Se saíram 3 raparigas ficamos então com $(y + 5) - 3$ raparigas. Então, ao todo e sabendo que ficaram 14 pessoas na festa concluímos que o número de raparigas que ficaram mais o número de rapazes é dado por:

$$(y + 5) - 3 + y = 14 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow y + 5 - 3 + y = 14 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2y + 2 = 14 \Leftrightarrow 2y + (-2) = 14 + (-2) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2y = 12 \Leftrightarrow 2/2y = 12/2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow y = 6.$$

Resposta esperada 6 rapazes e 11 raparigas.

A noção de equação possível e determinada e possível e indeterminada já foi abordada na última aula. Vou recorrer ao último exercício do teste para introduzir a noção de equação impossível. Houve alunos que já compreenderam, no entanto, houve alunos que ainda tiveram muitas dificuldades. Para classificar equações proponho o

Exercício 7 (pág. 179):
Pretende-se que o aluno resolva e classifique as equações.

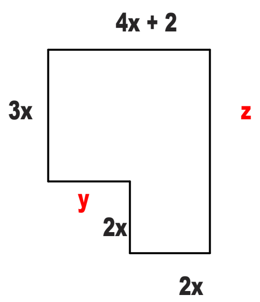
a) $7x - 3 = 7x \Leftrightarrow -3 = 0$ Eq. Impossível
b) $8x + 1 = 2x + 1 \Leftrightarrow 8x = 2x \Leftrightarrow 8x - 2x = 2x - 2x \Leftrightarrow 6x = 0 \Leftrightarrow x = 0$ Eq. Possível e determinada
c) $-2x + 3 = -2x + 3 \Leftrightarrow 2x = 2x \Leftrightarrow -2x + 3 + (-3) = -2x + 3 + (-3) \Leftrightarrow -2x = -2x \Leftrightarrow -2/-2x = -2/-2x \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x = x$ Eq. Possível e indeterminada
d) $5x + 2 = 5(x - 2) \Leftrightarrow 5x + 2 = 5x - 10 \Leftrightarrow 2 = -10$ Eq. Impossível.

Problema 8 (pág. 179)
Dificuldades: Para este problema o aluno deverá ter presente o que é o perímetro de uma figura. Sabendo que o lado do quadrado mede 2x, o aluno deverá perceber que o perímetro será $4 \times (2x)$ ou $2x + 2x + 2x + 2x$.
Sabendo que um retângulo tem de lados x e x+4, o seu perímetro será $x + (x + 4) + x + (x + 4)$.
Para que as duas figuras tenham o mesmo perímetro, é necessário que

$$\begin{aligned} P(\text{quadrado}) = P(\text{retângulo}) &\Leftrightarrow 2x + 2x + 2x + 2x = x + x + 4 + x + x + 4 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 8x = 4x + 8 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 8x + (-4x) = 4x + (-4x) + 8 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 4x = 8 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 4/4x = 8/4 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x = 2 \end{aligned}$$

A resposta a este problema é que para que as duas figuras tenham o mesmo perímetro, x terá de ser 2..

Problema 9 (pág. 179)
Dificuldades: Tal como no problema anterior questionar a turma se sabem o que é o perímetro de uma figura plana.. E, de acordo com o enunciado, como se traduz o problema para linguagem matemática.
Existem duas medidas que não estão no enunciado que podem provocar algumas dúvidas.



É fácil verificar que $z = 3x + 2x = 5x$
e $y = 4x + 2 + (-2x) = 2x + 2$

A partir daqui o aluno pode concluir que o perímetro é dado por:

$$\begin{aligned} P &= 4x+2 + z + 2x + 2x + y + 3x = \\ &= 4x+2 + 5x + 2x + 2x + 2x+2 + 3x \end{aligned}$$

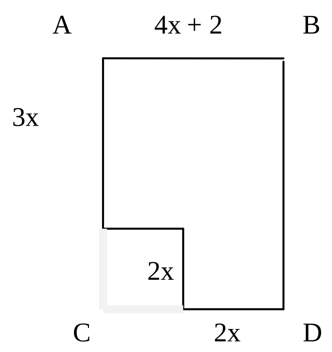
Sabe-se do enunciado que o perímetro da figura é 85. Resolvendo a equação

$$4x+2 + 5x + 2x + 2x + 2x+2 + 3x = 85$$

Obtemos o valor de x:

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow 18x + 4 = 85 \\ &\Leftrightarrow 18x + 4 + (-4) = 85 + (-4) \\ &\Leftrightarrow 18x = 81 \\ &\Leftrightarrow 18/18x = 81/18 \\ &\Leftrightarrow x = 4{,}5 \end{aligned}$$

Outra estratégia:
Caso o aluno tenha dificuldade em determinar z e y, pode sempre recorrer à seguinte figura:



O aluno pode portanto calcular o perímetro do retângulo [ABCD]:

[AB] + [BD] + [DC] + [CA] = 4x + 2 + 5x + 4x + 2 + 5 x

Sabemos que o perímetro mede 85 u.c.. Então o aluno tem de resolver a seguinte equação:

$4x + 2 + 5x + 4x + 2 + 5x = 85 \Leftrightarrow 18x + 4 = 85 \Leftrightarrow 18x + 4 + (-4) = 85 + (-4)$
$\Leftrightarrow 18x = 81 \Leftrightarrow 18/18x = 81/18$
$\Leftrightarrow x = 4{,}5$

Resposta: O valor de x tal que a medida do perímetro da figura seja 85, é 4,5.

Problema 10 (pág.179)

Dificuldades: O enunciado diz-nos que a área de um triângulo é 9 cm2. O aluno deverá saber a fórmula da área de um triângulo: A = (bxh)/2. Questionar a turma. Sabendo que a altura do triângulo é 4 (dado no enunciado) e a base é x+2, é fácil determinar o x, resolvendo a seguinte equação

$A = \frac{(x+2) \times 4}{2} = 9 \Leftrightarrow \frac{4x + 8}{2} = 9 \Leftrightarrow 2x + 4 = 9 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x + 4 + (-4) = 9 + (-4) \Leftrightarrow 2x = 5 \Leftrightarrow 2/2x = 5/2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = 5/2 = 2{,}5$

Outra estratégia: ao resolver a equação $A = \frac{(x+2)}{2} \times 4 = 9$, o aluno poderá sempre aplicar o 2º princípio de equivalência, multiplicando ambos os membros por 2, do seguinte modo:

$\frac{(x+2) \times 4}{2} = 9 \Leftrightarrow 2 \times \frac{(x + 2) \times 4}{2} = 2 \times 9 \Leftrightarrow (x + 2) \times 4 = 18 \Leftrightarrow 4x + 8 = 18 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4x + 8 + (.-8) = 18 + (-8) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4x = 10 \Leftrightarrow 4/4x = 10/4 \Leftrightarrow x = 2{,}5$

Pretende-se agora que, sabendo o valor de x, se calcule o perímetro do triângulo (igual à soma do comprimento dos seus lados)

P = x + (x + 2) + (2x + 1)

Sabendo que x = 2,5, vem

P = 2,5 + 2,5 + 2 + 2,5x2 + 1 = 5 + 2 + 5 + 1 = 13.

Resposta; O perímetro do triângulo é 13 cm.

Nota: O aluno poderá ainda ter dúvidas quanto à resolução de equações com parênteses. Assim, proponho que para resolver (x + 2)x4, se decomponha em 4 parcelas:

(x + 2) x 4 = (x + 2) + (x + 2) + (x + 2) + (x + 2) = 4x + 8.

Aprendizagem complementar (TPC, trabalhos escritos, …)

• Resolução dos problemas que foram previstos, e não foram resolvidos na aula.

Avaliação

A avaliação será feita, através, por exemplo:

• Da observação direta (interesse, empenho, sociabilidade);

• Do diálogo com os alunos (qualidade da participação);

• Da realização das tarefas propostas.

Pedagogia diferenciada

Observações *

Esquema de tempos:

Síntese das aulas anteriores: 10 min
Problema 4 : 10 min
Exercício 7: 5 min.
Problemas: 60 min
Síntese da aula: 5 min.

* Alterações ao plano de aula / notas relevantes